



К. ЛОНГМАЙР

# ФИЗИКА ПЛАЗМЫ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ КУРС

Перевод с английского  
О. П. Бегучева



АТОМИЗДАТ МОСКВА 1966

УДК 533.9

# ELEMENTARY PLASMA PHYSICS

---

**CONRAD L. LONGMIRE**

*Los Alamos Scientific Laboratory  
Los Alamos, New Mexico*

1963

**INTERSCIENCE PUBLISHERS**

a division of John Wiley & Sons, New York ● London

2.3.7

## ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ

Имя К. Л. Лонгмайра — известного физика-теоретика, хорошо знакомо всем, кто занимается проблемой управляемого термоядерного синтеза. Ему принадлежит честь открытия желобковой (конвективной) неустойчивости плазмы в установках с положительной кривизной силовых линий удерживающего магнитного поля, испортившей много крови как экспериментаторам, так и теоретикам. Естественно поэтому, что появление в русском переводе книги К. Л. Лонгмайра будет встречено с большим интересом.

Книга представляет собой достаточно полное и последовательное изложение основных теоретических проблем физики высокотемпературной плазмы. Входящее в английское название книги слово «элементарная» может быть отнесено лишь к характеру изложения этой сложной и далеко не исследованной области физики. По рассмотренным вопросам эта книга, пожалуй, наиболее полная из имеющихся в литературе. От большинства монографий по физике плазмы ее отличает также универсальность методов исследования плазменных задач. Наряду с наиболее строгим методом кинетического уравнения автор широко использует метод траекторий отдельных частиц, позволяющий наглядно трактовать картину поведения плазмы в целом. Даже такие нетривиальные эффекты, как затухание Ландау и магнитотормозное поглощение волн, интерпретируются на основе движения отдельных частиц в плазме.

Метод кинетического уравнения, положенный в основу теории явлений переноса, освещен последовательно и с достаточной полнотой. Приводится простой и наглядный вывод уравнения Больцмана с интегралом столкновений и уравнения Фоккера — Планка для плазмы. Детально рассмотрен вопрос о классической диффузии частиц в плазме поперек магнитного поля.

С другой стороны, теория неустойчивости в плазме освещена явно недостаточно. В частности, излагается лишь энергетический метод исследования устойчивости, с помощью которого рассмотрены желобковая неустойчивость и пинч-эффект (и очень кратко — неустойчивость, обусловленная анизотропией давления плазмы). Метод исследования устойчивости, основанный на кинетическом подходе, в книге совершенно не обсуждается, хотя известно, что наиболее интересные результаты по «универсальной» неустойчивости пространственно неоднородной плазмы низкого давления были получены с помощью именно этого метода. При чтении книги следует иметь в виду, что в ней не отражен прогресс, достигнутый в последние годы в изучении колебаний плазмы на основе использования метода геометрической оптики. С этими последними проблемами читатель может ознакомиться в сборнике «Вопросы теории плазмы» под редакцией М. А. Леонтовича (М., Атомиздат, 1963), а также по обзорным статьям А. А. Рухадзе и В. П. Силина [«Усп. физ. наук», 82, 499, (1964)] и А. А. Галеева, А. Б. Михайловского и Р. З. Сагдеева [«Атомная энергия», 15, 451, (1963)].

Ясная, физически наглядная форма изложения делает книгу Лонгмайра доступной как теоретикам, так и экспериментаторам. Более того, мне кажется, что она может служить прекрасным учебником для студентов, специализирующихся в области физики плазмы.

*Доктор физ.-мат. наук  
А. А. РУХАДЗЕ*

## ОТ АВТОРА

В основу этой книги положены лекции, прочитанные мной в Лос-Аламосе осенью и зимой 1956—1957 гг. перед физиками-теоретиками и экспериментаторами — участниками работ по проекту Шервуд. (Цель проекта — создание термоядерного реактора). Трудно представить себе аудиторию, более квалифицированную в разнообразных аспектах физики плазмы. Я стремился изложить физику плазмы как целостную научную дисциплину, заполняя пробелы там, где они встречались. Успехом в решении этой задачи, если о нем вообще можно говорить, я обязан, в частности, критической и одновременно дружеской реакции моей необыкновенной аудитории.

Записи лекций были размножены и розданы секретарем Б. Келли из теоретического отдела сотрудникам Лос-Аламосской научной лаборатории, а затем получили еще более широкое распространение. Оценка лекций была весьма благоприятной. Они использовались, насколько мне известно, как основа для университетских курсов в Чикаго, Гарварде и Принстоне. Ряд лиц любезно помог мне исправить ошибки и внести некоторые изменения.

Настоящая книга в основном написана, следуя этим лекциям, правда, с довольно серьезными переделками и дополнениями. Ее уровень рассчитан на аспиранта-физика, хотя я надеюсь, что и студенты найдут в ней достаточно полезных и понятных сведений.

Участники проекта Шервуд (а также его аналогов за рубежом) находили истинное наслаждение в обучении друг друга основам физики плазмы. Многие идеи родились в результате совместного мышления нескольких ученых, и сейчас вряд ли кому под силу определить степень участия и заслугу каждого в той или иной проблеме. В этой книге я даже не пытался решить подобную задачу. Мне все же

хочется выразить особую признательность тем, кому я обязан в первую очередь своим образованием в данной области физики, а именно Маршаллу, Розенблату, Лайману, Спичеру и Джеймсу Таку. Этот перечень, конечно, можно было бы продолжить.

Я также благодарен всей моей семье, позволившей мне проводить многие вечера и дни отдыха за чтением и правкой этой книги. И, наконец, я глубоко признателен Б. Келли, без постоянной поддержки и ободрения которой этот труд вряд ли был бы закончен

*Конрад Л. Лонгмайр*

## ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

### § 1.1. Введение

Термин «плазма» употребляется в современной физике для обозначения ионизированного газа, имеющего настолько высокую плотность, что силами взаимодействия составляющих его частиц уже нельзя пренебречь в сравнении с силами, действующими со стороны внешних полей. Так, незначительное число электронов, вращающихся по орбите в бетатроне, еще не составляют плазмы. Однако, если их число увеличивается настолько, что появляется так называемая дефокусировка за счет пространственного заряда, то вступают в силу законы, характерные для плазмы.

Поскольку силы, действующие между разноименно заряженными частицами, стремятся компенсировать друг друга, всем видам плазмы присуще стремление к максимально возможному электрически нейтральному состоянию. По определению проблема плазмы есть проблема многих тел.

В природе существует несколько видов плазмы. К плазменным образованиям можно отнести: ионосферные слои, большой радиационный пояс Земли, испускаемые Солнцем потоки заряженных частиц, некоторые типы кометных хвостов, вещество, образующееся после взрыва звезд. В лабораторных условиях плазма получается при электрических разрядах в газах. Именно в этой области впервые появился термин «плазма».

Возникший в течение последнего десятилетия интерес к управляемому термоядерному синтезу послужил стимулом для многочисленных исследований по сильноточным разрядам. Именно в связи с этими исследованиями



и появилось много новых результатов по физике плазмы. Однако ясно, что плазма играет и будет играть важную роль и в других практических приложениях, например в термоэлектронных преобразователях и, возможно, в двигателях межпланетных ракет.

Главной задачей при осуществлении регулируемого термоядерного синтеза является удержание газа, например дейтерия, имеющего температуру порядка 10—100 кэВ. Поскольку скорость термоядерной реакции очень сильно зависит от температуры, получение высоких температур выгоднее, чем получение высоких плотностей. Давление при этом может поддерживаться в умеренных пределах. Например, давление в газе при температуре 10 кэВ и плотности около  $10^{15}$  частиц в кубическом сантиметре имеет величину порядка 16 атм.

Газ такой высокой температуры, естественно, не должен соприкасаться с какими-либо материальными поверхностями. Так как при подобных температурах газ полностью ионизирован, было предложено удерживать его магнитными полями. Известно, что одиночная заряженная частица в соответствующе подобранном магнитном поле может удерживаться в ограниченной области пространства как угодно долго. Возникает вопрос: может ли большое число таких частиц одновременно удерживаться магнитным полем, или их взаимодействие приведет к тому, что они преодолеют его силы?

Настоящая книга написана в основном в связи с проблемами термоядерного синтеза, хотя изложенные в ней выводы могут найти более широкую область применения. Тем не менее в случаях, когда нужно было выбирать численные значения встречавшихся величин, использовались значения, относящиеся к термоядерным задачам. В частности, практически везде пренебрегалось присутствием нейтральных частиц в плазме.

Будем рассматривать систему заряженных частиц, движущихся в своих собственных и внешнем электромагнитных полях. Фундаментальные уравнения, описывающие интересные явления, хорошо известны. Электрическое поле  $E$  и магнитное поле  $B$  подчиняются уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1.4)$$

где  $\rho$  — плотность заряда;  $\mathbf{j}$  — плотность тока;  $c$  — скорость света.

Мы используем систему единиц Гаусса ( $\mathbf{E}$  и  $\rho$  измеряются в электростатической системе единиц,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{j}$  — в электромагнитной). Движение частиц подчиняется закону Ньютона. Для частицы с номером  $n$

$$m_n \ddot{\mathbf{r}}_n = \mathbf{F}_n, \quad (1.5)$$

где  $\mathbf{r}_n$  — координата частицы;  $m_n$  — ее масса;  $\mathbf{F}_n$  — сила Лоренца

$$\mathbf{F}_n = e_n \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}_n) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_n \mathbf{B}(\mathbf{r}_n)] \right\}. \quad (1.6)$$

Заряд частицы обозначается  $e_n$  и ее скорость  $\mathbf{v}_n$ .

Несмотря на то что эти уравнения известны давно, полная картина, описываемая ими, весьма сложна и не может быть уяснена с первого взгляда. Удобнее разделить всю проблему на отдельные задачи:

1) существование и свойства стационарных решений уравнений (1.1) — (1.4) при использовании только усредненных значений полей;

2) медленно меняющиеся решения этих уравнений, не ограниченные условием малости амплитуды;

3) малые возмущения (волны) с произвольной частотой и рассмотрение устойчивости стационарных уравнений;

4) ударные волны — пример возмущений большой амплитуды и частоты;

5) эффекты, обусловленные дискретностью среды, т. е. влиянием столкновений, такие, как диффузия в обычном пространстве и в пространстве импульсов, а также радиационные эффекты.

Мы будем рассматривать влияние столкновений как малое возмущение. Такой подход прямо противоположен газодинамическому методу, где столкновения играют доминирующую роль. Он вполне применим, однако, при высоких температурах и малой плотности, когда среднее значение потенциала между соседними частицами мало по сравнению с их тепловой энергией.

## § 1.2. Некоторые особенности уравнений Максвелла

В § 1.1. уравнения Максвелла были приведены в обычной форме. Такая форма особенно удобна для решения статических задач. Действительно, если дивергенция и ротор какого-либо векторного поля заданы, то при наличии конкретных граничных условий оно само определяется однозначно. Однако по отношению к задачам, содержащим зависимость от времени, эти уравнения в некотором смысле излишне полные. Так, если взять дивергенцию от уравнения (1.2), то получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.7)$$

С другой стороны, дифференцирование по времени уравнения (1.3) дает тот же самый результат.

То, что два различных способа приводят к одному и тому же результату, выглядит странно. Они могли и не привести к одинаковому результату.

Если же продифференцировать по времени уравнение (1.1) и взять дивергенцию от выражения (1.4), то получим

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (1.8)$$

Это уравнение сохранения заряда, по счастливой случайности совпадающее с экспериментально установленными фактами. То, что в уравнениях Максвелла содержится закон сохранения заряда, — не менее странное явление.

Подход, который помогает избежать подобных противоречий, состоит в следующем.

Рассмотрим уравнения (1.2) и (1.4):

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\operatorname{rot} \mathbf{E}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \operatorname{rot} \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Эти уравнения определяют  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  для любого момента времени по их начальным значениям. Поэтому оказывается возможным рассматривать уравнения (1.1) и (1.3) как начальные условия. Так и есть на самом деле.

Действительно, если уравнения (1.1) и (1.3) удовлетворяются в начальный момент, они удовлетворяются всегда,

Так как применение операций дивергенции к уравнению (1.2) дает уравнение (1.7). Но из последнего уравнения следует, что если дивергенция  $\mathbf{V}$  равна нулю в начальный момент, то она всегда равна нулю. Подобным образом, взяв дивергенцию от уравнения (1.4) и используя на этот раз уравнение сохранения заряда (1.8), найдем, что соотношение  $\operatorname{div} \mathbf{E} - 4\pi\rho = 0$  справедливо в любой момент, если оно имело место в начальный момент.

### § 1.3. Сохранение импульса

Из уравнения (1.5), выражающего второй закон Ньютона, если его просуммировать по всем частицам в единице объема, следует, что приращение импульса этих частиц равно сумме электромагнитных сил, действующих на единичный объем. Чтобы найти более удобное выражение для закона движения частиц плазмы, введем функцию распределения частиц.

Определим ее следующим образом:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \, d\mathbf{r} \, d\mathbf{v} \text{ равно числу частиц в элементе объема } d\mathbf{r} \, d\mathbf{v} \text{ фазового пространства.} \quad (1.9)$$

Если имеется несколько сортов частиц, то мы будем вводить такую функцию распределения для каждого сорта. Пока предположим, что имеется только один сорт частиц.

Одной из главных задач является отыскание функции распределения. В этом параграфе найдем некоторые условия, накладываемые на функцию распределения законом Ньютона.

Пространственная плотность частиц

$$N(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \, d\mathbf{v}. \quad (1.10)$$

Выберем декартову систему координат  $x_1, x_2, x_3$  и обозначим соответствующие компоненты скорости  $v_1, v_2, v_3$ . Плотность  $i$ -й компоненты импульса

$$\pi_i(\mathbf{r}) = \int m v_i f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \, d\mathbf{v} = N(\mathbf{r}) m \bar{v}_i(\mathbf{r}), \quad (1.11)$$

где черта сверху обозначает усреднение по скоростям. Написанная величина может меняться во времени под действием электромагнитных сил. Она может также меняться оттого, что частицы приходят в выделенный объем и поки-

дают его. Плотность потока  $i$ -й компоненты импульса, т. е. количество  $i$ -й компоненты импульса, которая переносится через единичную площадку, направленную нормально к  $j$ -й компоненте скорости, есть

$$P_{ij}(\mathbf{r}) = \int m v_i v_j f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} = N(\mathbf{r}) \overline{m v_i v_j}. \quad (1.12)$$

Назовем  $P_{ij}$  тензором плотности потока импульса. Этот тензор симметричен (по индексам). Он тесно связан с тензором давления  $p_{ij}$  (хотя не тождествен ему), который определяют следующим образом. Пусть

$$v_i = \bar{v}_i + \delta v_i, \quad (1.13)$$

где  $\delta v_i$  (не обязательно бесконечно малая величина) — разность между  $v_i$  и средним значением  $\bar{v}_i$ . Тогда тензором давления называется выражение

$$p_{ij}(\mathbf{r}) = Nm \overline{\delta v_i \delta v_j}. \quad (1.14)$$

Можно легко показать, что  $P_{ij}$  и  $p_{ij}$  связаны соотношением

$$P_{ij} = Nm \bar{v}_i \bar{v}_j + p_{ij}. \quad (1.15)$$

Таким образом, если  $P_{ij}$  — полная плотность потока импульса, то  $p_{ij}$  есть плотность потока импульса в системе координат, движущейся с локальной средней скоростью.

В том случае, если распределение по  $\delta v_i$  максвелловское с температурой  $T$ ,  $p_{ij}$  принимает вид

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} NkT & 0 & 0 \\ 0 & NkT & 0 \\ 0 & 0 & NkT \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

где  $k$  — постоянная Больцмана. Такой диагональный и постоянный тензор, сохраняющий свой вид при вращениях системы координат, называется скаляром. Вектор импульса, переносимого в этом случае через некоторую поверхность, перпендикулярен ей.

Обычно давление представляют как силу, отнесенную к площади. Однако, согласно второму закону Ньютона, оно может быть определено и как импульс, переносимый через поверхность. Мы можем не интересоваться, чем определяется поток импульса: переносом его частицами или силами, действующими на поверхность. Члены  $NkT$  в выражении

(1.16) получают обычно и при выводе силы, действующей на единицу поверхности.

Для случая высокотемпературной плазмы рискованно предполагать (как видно будет из дальнейшего), что тензор давления есть скаляр, поскольку частота столкновений, обеспечивающих изотропность функции распределения, при этом недостаточно высока. Тензор плотности потока импульса еще с меньшим основанием можно считать скаляром.

Количество  $i$ -й компоненты импульса, вытекающей из единичного объема в единицу времени, есть  $\frac{\partial}{\partial x_j} P_{ij}$ , где, как принято, по повторяющимся индексам производится суммирование. Тогда, если просуммировать закон Ньютона для всех частиц в выделенном элементе объема, получается

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial t} + \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} = F_i(V), \quad (1.17)$$

где  $F(V)$  —  $i$ -я компонента суммы электромагнитных сил, действующих на частицы в этом объеме.

Выражение для электромагнитных сил получают суммированием уравнения (1.6):

$$F(V) = \rho \mathbf{E} + [\mathbf{jB}]. \quad (1.18)$$

Здесь использованы обозначения

$$\rho = Ne; \quad j_i = \frac{Ne\bar{v}_i}{c}. \quad (1.19)$$

Если бы правая часть уравнения (1.17) равнялась нулю, то из него следовало, что импульс частиц сохраняется. Наличие электромагнитных сил нарушает закон сохранения импульса частиц. Посмотрим, нельзя ли ввести для поля плотность импульса  $G_i$  и плотность потока импульса  $T_{ij}$  таким образом, чтобы полный импульс для частиц и поля сохранялся. Этого можно достигнуть, если представить силу  $F(V)$  следующим образом:

$$F_i(V) = -\frac{\partial G_i}{\partial t} - \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}. \quad (1.20)$$

В этом случае уравнение (1.17) приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\pi_i + G_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (P_{ij} + T_{ij}) = 0. \quad (1.21)$$

Величины  $G_i$  и  $T_{ij}$  могут зависеть только от полей. Мы должны поэтому взять выражение (1.18) и попытаться

исключить из него с помощью уравнений Максвелла плотность заряда и плотность тока.

Из уравнения (1.1) найдем

$$\rho \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} \{(\nabla \mathbf{E}) \mathbf{E} - (\mathbf{E} \nabla) \mathbf{E}\},$$

где оператор  $\nabla$  действует на все величины, стоящие справа от него. Первый член в скобках имеет нужный нам вид, так как его  $i$ -я компонента есть  $\frac{\partial}{\partial x_j} E_i E_j$ . Второй же можно преобразовать с помощью векторного тождества:

$$[\mathbf{E} [\nabla \mathbf{E}]] = \nabla \frac{E^2}{2} - (\mathbf{E} \nabla) \mathbf{E}. \quad (1.22)$$

Выражая отсюда  $(\mathbf{E} \nabla) \mathbf{E}$  и учитывая уравнение (1.2), найдем

$$\rho \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} \left\{ -\frac{1}{c} \left[ \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] + (\nabla \mathbf{E}) \mathbf{E} - \nabla \frac{E^2}{2} \right\}. \quad (1.23)$$

Из уравнения (1.4) находим

$$[\mathbf{j} \mathbf{B}] = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{c} \left[ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \mathbf{B} \right] + [\mathbf{B} [\nabla \mathbf{B}]] \right\}.$$

С помощью тождества (1.22) получаем

$$[\mathbf{B} [\nabla \mathbf{B}]] = \nabla \frac{B^2}{2} - (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} = \nabla \frac{B^2}{2} - (\nabla \mathbf{B}) \mathbf{B} + \mathbf{B} (\nabla \mathbf{B}).$$

Последний член в этой формуле обращается в нуль в силу уравнения (1.3), и тогда

$$[\mathbf{j} \mathbf{B}] = \frac{1}{4\pi} \left\{ -\frac{1}{c} \left[ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \mathbf{B} \right] + (\nabla \mathbf{B}) \mathbf{B} - \nabla \frac{B^2}{2} \right\}. \quad (1.24)$$

Теперь видно, что с помощью уравнений (1.23) и (1.24) сила  $\mathbf{F}(V)$  действительно может быть представлена в форме (1.20), причем плотность импульса

$$\mathbf{G} = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{E} \mathbf{B}], \quad (1.25)$$

а плотность потока импульса

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{E^2 + B^2}{2} \delta_{ij} - (E_i E_j + B_i B_j) \right\}. \quad (1.26)$$

Здесь введен символ Кронекера

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ij} &= 0 & \text{для } i \neq j, \\ \delta_{ij} &= 1 & \text{для } i = j. \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

Тензор  $T_{ij}$  называется тензором натяжений электромагнитного поля.

#### § 1.4. Некоторые примеры использования тензора натяжений

В статическом случае закон сохранения импульса (1.21) приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (P_{ij} + T_{ij}) = 0. \quad (1.28)$$

Исследуем теперь детально несколько статических задач, чтобы показать, как давление среды уравнивается натяжениями полей.

Для начала возьмем очень простой случай, при котором магнитное поле имеет одно направление (совпадает с направлением вдоль оси  $z$ ), а электрическое поле равно нулю. В этом случае

$$T = \frac{1}{8\pi} \begin{pmatrix} B^2 & 0 & 0 \\ 0 & B^2 & 0 \\ 0 & 0 & -B^2 \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Мы видим, что в направлениях, перпендикулярных к вектору  $\mathbf{B}$ , возникает давление  $B^2/8\pi$ , а в направлении, параллельном  $\mathbf{B}$ , действует натяжение  $B^2/8\pi$ . Силовые линии магнитного поля, таким образом, могут быть уподоблены натянутым резиновым лентам, отталкивающим друг друга. Если тензор плотности потока импульса такого простого вида, как в выражении (1.16), уравнение сохранения импульса (1.28) сводится к

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{B^2}{8\pi} + NkT \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{B^2}{8\pi} + NkT \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{B^2}{8\pi} + NkT \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1.30)$$



Из уравнения (1.3) следует, что для данного случая  $\frac{\partial B}{\partial z} = 0$ .

Поэтому из последнего уравнения (1.30) вытекает, что давление  $NkT$  также не зависит от  $z$ . Учитывая этот факт, из двух других уравнений системы (1.30) можно найти

$$\frac{B^2}{8\pi} + NkT = \text{const.} \quad (1.31)$$

Величину  $B^2/8\pi$  иногда называют магнитным давлением. Таким образом, сумма магнитного и обычного давлений в этом примере — величина постоянная.

Натяжения, действующие в направлении оси  $z$  на каждый элемент объема, в данном случае взаимно уничтожаются, хотя в общем случае это не имеет места.

Для каждой точки любого магнитного поля можно всегда выбрать декартову систему координат с осью  $z$  вдоль линий этого поля. Тогда в этой точке тензор натяжений принимает диагональную форму (1.29). Таким образом, существование натяжений вдоль силовых линий и давления в перпендикулярных к ним направлениях является общим результатом. Однако условие равновесия включает производные компонент тензора, которые для недиагональных элементов не всегда равны нулю.

В качестве второго примера рассмотрим осесимметричный случай. Выберем цилиндрическую систему координат  $r$ ,  $\theta$  и  $z$  так, чтобы магнитное поле было направлено вдоль линий  $\theta$ . Тогда тензор натяжений в местной координатной системе имеет вид

$$T = \frac{1}{8\pi} \begin{pmatrix} B^2 & 0 & 0 \\ 0 & -B^2 & 0 \\ 0 & 0 & B^2 \end{pmatrix}. \quad (1.32)$$

Предположим, что  $B$  зависит только от  $r$  и тензор плотности потока импульса есть просто скаляр вида (1.16), где  $p$  также зависит только от  $r$ .

Вместо того чтобы вычислять дивергенцию  $T$ , проинтегрируем уравнение (1.28) по малому элементу объема. Применяя теорему Гаусса, получим выражение

$$\int n_j (P_{ij} + T_{ij}) ds = 0, \quad (1.33)$$

где  $n$  — внешняя нормаль к поверхности элемента объема. Из уравнения (1.33) следует, что сумма натяжений, действующих на поверхность элемента объема в случае равновесия, должна равняться нулю.

Выберем элемент объема так, чтобы его грани совпадали с координатными плоскостями  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$ , как это показано на рис. 1.1 В соответствии с уравнением (1.32) силы, действующие на поверхность этого элемента объема, направлены нормально к его граням.

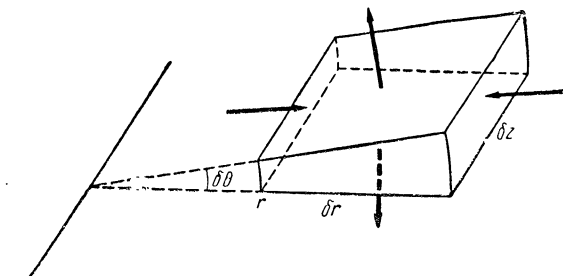


Рис. 1.1. Элемент объема в цилиндрической системе координат.

Очевидно, что силы, действующие в направлении  $z$ , уничтожаются, а действующие на грани и совпадающие с координатными поверхностями  $r$  и  $\theta$ , складываются, образуя равнодействующую в направлении  $r$ .

Магнитные силы, действующие на две последние боковые поверхности, показаны на рис. 1.1; на поверхность, нормальную к направлению  $r$ , действует давление, а на поверхность, нормальную к линиям  $\theta$ , — натяжение. Сложим радиальные компоненты этих сил, опуская члены более высокого порядка малости, чем величина объема  $r\delta\theta\delta r\delta z$ . Тогда для радиальной компоненты магнитной силы имеем

$$\begin{aligned}
 F_{\text{магн}} &= \frac{1}{8\pi} \left\{ B^2(r) r \delta\theta \delta z - B^2(r + \delta r) (r + \delta r) \delta\theta \delta z - \right. \\
 &- 2 \sin \frac{\delta\theta}{2} B^2(r) \delta r \delta z \left. \right\} = \frac{r \delta\theta \delta r \delta z}{8\pi} \left\{ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B^2) - B^2 \right\} = \\
 &= -\frac{r \delta\theta \delta r \delta z}{8\pi} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 B^2. \quad (1.34)
 \end{aligned}$$

Подобные вычисления для радиальной компоненты сил давления дают

$$F_{\text{част}} = -r\delta\theta\delta r\delta z \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (1.35)$$

Уравнение равновесия (1.33) тогда можно записать в форме

$$\frac{1}{8\pi} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 B^2 + \frac{\partial p}{\partial r} = 0. \quad (1.36)$$

Это уравнение в общем случае уже не приводит к простому результату (1.31). Чтобы проинтегрировать уравнение (1.36), нужны дополнительные сведения о поведении величин  $B(r)$  или  $p(r)$ .

Если нет плазмы и, следовательно,  $p = 0$ , то уравнение (1.36) после интегрирования имеет вид

$$B = \frac{\text{const}}{r}. \quad (1.37)$$

Такое поле создается, в частности, током, протекающим по оси. В этом случае натяжения, действующие на выделенный элемент объема, как и на любой другой, не содержащий токов элемент, обращаются в нуль. Это совершенно естественно, так как магнитные силы были получены из выражения  $[j\mathbf{B}]$ .

### § 1.5. Общее выражение для дивергенции тензора в цилиндрических координатах

Вычисление натяжений, действующих на грани элементарного объема, произведенное в предыдущем примере, по существу сводится к нахождению дивергенции тензора натяжений. Аналогичный способ может быть использован для вычисления дивергенции какого-либо тензора в любой ортогональной системе координат.

В частном случае декартовой системы координат дивергенция выражается так, как, например, в левой части уравнения (1.28).

Цилиндрическая система координат весьма удобна при рассмотрении магнитных полей. Компоненты дивергенции

тензора в цилиндрических координатах, построенного в местной декартовой системе

$$T = \begin{pmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} & T_{rz} \\ T_{0r} & T_{0\theta} & T_{0z} \\ T_{zr} & T_{z\theta} & T_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

имеют вид:

компонента по  $r$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} p T_{rr} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} T_{r\theta} - \frac{1}{r} T_{0\theta} + \frac{\partial}{\partial z} T_{rz};$$

компонента по  $\theta$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r T_{\theta r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} T_{0\theta} + \frac{1}{r} T_{r\theta} + \frac{\partial}{\partial z} T_{0z};$$

компонента по  $z$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r T_{zr} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} T_{z\theta} + \frac{\partial}{\partial z} T_{zz}.$$

(1.39)

Читателю предлагается проверить самостоятельно этот результат.

### § 1.6. Закон сохранения энергии

Если умножить уравнение движения  $n$ -й частицы (1.5) скалярно на  $\mathbf{v}_n$ , то получим

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m_n v_n^2 \right) = (\mathbf{v}_n \mathbf{F}) = e_n (\mathbf{v}_n \mathbf{E}). \quad (1.40)$$

Из уравнения (1.40) следует, что увеличение кинетической энергии частицы в единицу времени равно работе, совершаемой электрическим полем над этой частицей (магнитное поле не совершает работы). Если просуммировать уравнение (1.40) по всем частицам в единице объема, то можно найти увеличение энергии всех частиц в единицу времени:

$$\frac{D}{Dt} \mathcal{E}_p = c (\mathbf{j} \mathbf{E}). \quad (1.41)$$

Производная от энергии в формуле (1.40) обозначена как  $\frac{D}{Dt}$  для того, чтобы подчеркнуть факт отношения ее к фиксированной группе частиц (так называемая материальная, или субстанциональная, производная).

Плотность энергии частиц  $\mathcal{E}_p$  может быть выражена через функцию распределения, введенную в § 1.3:

$$\mathcal{E}_p = \int \frac{1}{2} m v^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} = \frac{1}{2} N m \bar{v}^2. \quad (1.42)$$

Субстанциональная производная в уравнении (1.41) включает не только изменение энергии внутри единицы объема, но также и любое изменение энергии за счет потока частиц из этого объема или в него. Последняя величина может быть описана как дивергенция потока энергии  $\mathbf{Q}$ . Количество энергии, протекающей в единицу времени через элементарную ориентированную нормально к направлению  $i$ -й оси площадку, можно определить как

$$Q_i = \int \frac{1}{2} m v^2 v_i f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} = \frac{1}{2} N m \overline{v^2 v_i}. \quad (1.43)$$

В § 1.3 тензор плотности потока импульса  $P_{ij}$  был разделен на две части, одна из которых ( $m \bar{v}_i \bar{v}_j$ ) описывает средние величины скоростей, а другая—( $m \delta v_i \delta v_j$ ) относится к отклонениям скоростей частиц от их средних значений.

Аналогично можно поступить по отношению к плотности энергии и вектору потока энергии.

Используя соотношение (1.13), можно легко найти, что выражение (1.42) для плотности энергии в среде распадается на две части:

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} N m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} N m \overline{\delta v^2}. \quad (1.42')$$

В этом и последующих выражениях там, где  $v$  или  $\delta v$  не снабжены никакими индексами, будем подразумевать модуль соответствующего вектора. Первый член в правой части уравнения (1.42') можно назвать макроскопической энергией, а второй — внутренней энергией.

Для вектора потока энергии  $\mathbf{Q}$  найдем

$$Q_i = \frac{1}{2} m \int (\bar{v}_j + \delta v_j) (\bar{v}_j + \delta v_j) (\bar{v}_i + \delta v_i) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v},$$

где использовано правило суммирования по повторяющимся индексам. Если перемножить выражения в скобках, то получим шесть членов, средние от которых необходимо вычислить

$$\bar{v}^2 \bar{v}_i; \quad 2\bar{v}_j \delta v_j \bar{v}_i; \quad \delta v^2 \bar{v}_i; \quad \bar{v}^2 \delta v_i; \quad 2\bar{v}_j \delta v_j \delta v_i; \quad \delta v^2 \delta v_i.$$

Поскольку все величины с чертой наверху здесь постоянны, их можно вынести за знак интеграла. Тогда средние от второго и четвертого членов обращаются в нуль, так как  $\overline{\delta v_j} = 0$  по определению  $\overline{v_j}$ .

Таким образом, для  $Q_i$  имеем

$$Q_i = \frac{1}{2} Nm \overline{v^2} \overline{v_i} + \frac{1}{2} Nm (\overline{v_i} \overline{\delta v^2} + 2 \overline{v_j} \overline{\delta v_j \delta v_i}) + \frac{1}{2} Nm \overline{\delta v^2 \delta v_i}. \quad (1.43')$$

Первый член справа соответствует макроскопической энергии, второй описывает перенос внутренней энергии за счет средней скорости среды, или, как мы будем говорить, за счет конвекции. Этот член, как и первый, обращается в нуль в системе координат, движущейся со средней скоростью среды. Последний же член может быть не равен нулю даже в такой системе координат. Этот член лучше всего назвать энергией, переносимой за счет теплопроводности или электропроводности.

Поскольку мы пока не указали способов вычисления величин отдельных слагаемых  $\mathcal{E}_p$  и  $\mathbf{Q}$ , в этой главе будем иметь дело непосредственно с  $\mathcal{E}_p$  и  $\mathbf{Q}$ . Вводя их в уравнение (1.41), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_p + \operatorname{div} \mathbf{Q} = c(\mathbf{jE}). \quad (1.44)$$

Если бы правая часть уравнения (1.44) обращалась в нуль, то это означало бы, что энергия частиц сохраняется. Однако за счет работы, производимой над частицами электрическим полем, их энергия не остается постоянной. Тем не менее можно ввести плотность энергии  $\mathcal{E}_f$  и вектор потока энергии  $\mathbf{S}$  для полей таким образом, чтобы полная энергия системы плазма плюс поле сохранялась постоянной. Этого можно достичь, если представить  $c(\mathbf{jE})$  следующим образом:

$$c(\mathbf{jE}) = - \frac{\partial \mathcal{E}_f}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{S}. \quad (1.45)$$

Величины  $\mathcal{E}_f$  и  $\mathbf{S}$  должны зависеть только от напряженностей полей, поэтому можно исключить плотность тока

из выражения ( $\mathbf{jE}$ ), используя уравнения Максвелла. Из уравнения (1.4) находим

$$\begin{aligned} c(\mathbf{jE}) &= \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \left\{ \text{rot } \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right\} = \\ &= \frac{c}{4\pi} [(\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{B}] - \frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2}{8\pi}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Используя уравнение (1.2), получим

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}[\nabla \mathbf{B}]) &= [\mathbf{E}(\nabla \mathbf{B})] = -[\nabla(\mathbf{E}\mathbf{B})] + \\ &+ (\mathbf{B}[\nabla \mathbf{E}]) = -(\nabla[\mathbf{E}\mathbf{B}]) + \mathbf{B} \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Тогда уравнение (1.46) примет вид

$$c(\mathbf{jE}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{E^2 + B^2}{8\pi} \right) - \text{div} \left( \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{B}] \right).$$

При сравнении полученного результата с уравнением (1.45) видно, что полная энергия системы сохраняется в том случае, если плотность энергии и поток энергии определены следующим образом:

$$\mathcal{E}_f = \frac{(E^2 + B^2)}{8\pi}, \quad (1.47)$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{B}]. \quad (1.48)$$

Этот вывод, так же как и формулы (1.25) и (1.26) для количества движения, конечно, был известен уже давно. Однако тот факт, что плотности физических величин и плотности их потоков могут быть определены так, что соблюдаются законы сохранения для всей системы, крайне примечателен.

Вектор  $\mathbf{S}$  называется вектором Пойнтинга. Примеры использования  $\mathcal{E}_f$  и  $\mathbf{S}$  можно найти в книгах по теории поля. В частности, энергия, запасаемая в конденсаторах и индуктивностях, может быть отождествлена с плотностью энергии поля  $\mathcal{E}_f$ , а энергия, диссипируемая в сопротивлениях, может рассматриваться как вносимая в сопротивление за счет вектора Пойнтинга. Примеры использования  $\mathcal{E}_f$  и  $\mathbf{S}$  в физике плазмы будут встречаться в дальнейшем.

## § 1.7. Закон сохранения массы

Имеется еще более простой закон, о котором до сих пор не упоминалось, — закон сохранения числа частиц или массы. При описании движения частиц с помощью уравнения Ньютона этот закон удовлетворяется за счет того, что принимаются в расчет траектории всех частиц. При описании поведения частиц с помощью функции распределения этот закон принимает форму дифференциального уравнения.

В уравнении (1.10) уже было введено понятие о плотности частиц  $N$ . Плотность потока частиц

$$\mathbf{U} = \int \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} = N\bar{\mathbf{v}}. \quad (1.49)$$

Тогда закон сохранения массы можно выразить следующим образом:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{U} = 0. \quad (1.50)$$

Если частицы могут исчезать или образовываться, например, в результате ядерных реакций, то в правую часть уравнения (1.50) следует добавить соответствующие члены (плотность источников).

## § 1.8. Уравнение Лиувилля

При решении некоторых простых механических задач оказывается достаточным использовать законы сохранения энергии и импульса. В проблеме многих тел, с которой нам приходится иметь дело, положение меняется, так как число неизвестных в тех уравнениях, которые были приведены, больше, чем число самих уравнений, т. е. уравнения сохранения массы, импульса и энергии, если так можно выразиться, «не всё знают». Тем не менее из них часто можно получить весьма полезные сведения как для теоретических, так и для экспериментальных исследований. В частности, условия равновесия (в статическом случае) (1.31) и (1.36) были использованы для получения данных о давлении среды из измерений магнитного поля.

Чтобы найти решение общей задачи, необходимо вновь возвратиться к уравнениям движения и уравнениям Максвелла за дополнительными сведениями. Возможны два пути решения этой задачи. Первый заключается в том, чтобы



сначала решить уравнения движения отдельных частиц в некоторых произвольных полях, вычислить плотность зарядов и токов и, подставив их значения в уравнения Максвелла, определить величину напряженности полей. Этот метод имеет за собой преимущество максимальной физической наглядности и рассмотрен детально в гл. 2 и 3.

Другой метод основан на использовании уравнения Лиувилля, описывающего поведение функции распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ , введенной нами ранее (1.9). Этот метод более пригоден для точного математического рассмотрения проблемы, хотя он не всегда легко допускает физическую интерпретацию. Оптимальный подход должен сочетать в себе использование обоих методов, чтобы можно было дать физическое истолкование результатов, получаемых из уравнения Лиувилля с помощью метода отдельных частиц.

В этом параграфе рассмотрим метод уравнения Лиувилля, а в дальнейшем покажем, как его применить к поставленным задачам.

Уравнение Лиувилля описывает поведение плотности частиц в шестимерном фазовом пространстве, координатами в котором являются пространственные координаты и компоненты скорости частицы. Каждая частица в определенный момент времени описывается точкой в таком пространстве. При рассмотрении движения частицы во времени эта точка описывает некоторую траекторию в фазовом пространстве. Шестимерная скорость движения этой точки  $\mathbf{V}_6$  имеет компоненты  $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ , где точки означают дифференцирование по времени. Используя уравнение Ньютона, можно написать

$$\mathbf{V}_6 = \left( v_x, v_y, v_z, \frac{F_x}{m}, \frac{F_y}{m}, \frac{F_z}{m} \right), \quad (1.51)$$

где  $F_x$ ,  $F_y$  и  $F_z$  — компоненты силы, действующей на частицу, а  $m$  — ее масса.

Положим теперь, что сила  $\mathbf{F}$  является функцией положения и скорости частиц. Это предположение вполне оправдано в отношении сил, обязанных своим происхождением усредненному электромагнитному полю частиц. Силы, связанные с взаимодействием отдельных частиц, оставим в стороне, так как они зависят еще и от точных значений координат других частиц. Поскольку нам предстоит оперировать с плотностью частиц, будем рассматривать лишь

средние силы, так как для учета отдельных взаимодействий информации недостаточно. Поэтому влияние столкновений и других флуктуационных процессов при таком описании выпадает из рассмотрения. Если учесть столкновения, то уравнение Лиувилля превращается в уравнение Больцмана, которое будет рассмотрено позднее.

В соответствии со сделанным ранее предположением вектор  $\mathbf{V}_6$  определен положением точки в фазовом пространстве, а если такая точка задана, возможно предсказать ее траекторию. Однако проще обратиться прямо к функции распределения.

Пусть  $f(x, y, z, v_x, v_y, v_z)$  есть плотность частиц в фазовом пространстве. Поскольку число частиц сохраняется, уравнение сохранения в фазовом пространстве имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{V}_6 \mathbf{V}_6 f) = 0. \quad (1.52)$$

Здесь  $\mathbf{V}_6 f$  — поток частиц в фазовом пространстве, а  $\mathbf{V}_6$  — шестимерная дивергенция. Проведя векторное дифференцирование, найдем

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{V}_6 \mathbf{V}_6 f) + f (\mathbf{V}_6 \mathbf{V}_6) = 0. \quad (1.53)$$

Далее

$$\mathbf{V}_6 \mathbf{V}_6 = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{m} \left( \frac{\partial F_x}{\partial v_x} + \frac{\partial F_y}{\partial v_y} + \frac{\partial F_z}{\partial v_z} \right). \quad (1.54)$$

В последнем выражении первые три члена обращаются в нуль, так как  $v_x$ ,  $v_y$  и  $v_z$  являются независимым переменным, а  $\frac{\partial}{\partial x}$ , например, означает дифференцирование при сохранении всех координат, кроме  $x$ , постоянными.

В большинстве случаев последние три члена также обращаются в нуль. В частности, они равны нулю для случая обычной силы Лоренца:

$$F_x = e \left[ E_x + \frac{1}{c} (v_y B_z - v_z B_y) \right], \quad \frac{\partial F_x}{\partial v_x} = 0$$

и т. д. При этом

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{V}_6 \mathbf{V}_6 f) = 0. \quad (1.55)$$

Это и есть уравнение Лиувилля. Вектор  $\mathbf{V}_6$  определяется равенством (1.51).

Поскольку

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}_6 \nabla_6) \quad (1.56)$$

есть производная, взятая вдоль пути отдельной частицы, уравнение Лиувилля гласит, что плотность частиц в фазовом пространстве вокруг некоторой частицы сохраняется постоянной при ее движении.

В случае сил трения зависимость сил от скорости имеет вид

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{v} \quad (1.57)$$

и последние три члена в уравнении (1.54) не исчезают, при этом

$$(\nabla_6 \mathbf{V}_6) = -\frac{3k}{m}. \quad (1.58)$$

При учете этого члена в уравнении (1.53) получим модифицированное уравнение Лиувилля. Плотность  $f$  в окрестности траектории частицы в фазовом пространстве уже не сохраняется постоянной, а увеличивается со временем. Это соответствует тому факту, что по мере замедления частиц за счет сил трения они сосредоточиваются во все уменьшающейся области фазового пространства около точки  $\mathbf{v} = 0$ . Поэтому их плотность должна возрастать. Однако нам почти не придется иметь дело с подобными случаями.

### § 1.9. Уравнение Лиувилля с учетом силы Лоренца

При учете силы Лоренца уравнение (1.6) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \nabla_r f) + \frac{e}{m} \left( \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right\} \cdot \nabla_v f \right) = 0. \quad (1.59)$$

Здесь  $\nabla_r$  — градиент в обычном пространстве, а  $\nabla_v$  — градиент в пространстве скоростей. Это уравнение в частных производных с семью независимыми переменными очень трудно точно решить, за исключением некоторых простейших задач. Однако его можно решить приближенно, используя для различных задач соответствующие способы приближений. Рассмотрим некоторые из них в следующих

главах. Пока обратимся к одному из них, имеющему достаточно общее значение, и ясно демонстрирующему связь законов сохранения с функцией распределения. Этот метод основан на вычислении моментов функции распределения в пространстве скоростей и их связи за счет уравнения Лиувилля.

Уравнение для низших моментов может быть получено интегрированием уравнения Лиувилля по всему пространству скоростей

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} + (\nabla_r \int \mathbf{v} f d\mathbf{v}) + \frac{\dot{e}}{m} \int \left( \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right\} \nabla_v f \right) d\mathbf{v} = 0. \quad (1.60)$$

Первый интеграл здесь равен просто  $N(\mathbf{r}, t)$  — плотности частиц в обычном пространстве, уже введенной нами ранее в уравнение (1.10). Второй интеграл равен плотности потока частиц в обычном пространстве  $N\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$ , встречающейся в уравнении (1.49). Третий же интеграл может быть преобразован следующим образом:

$$\int \left( \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right\} \nabla_v f \right) d\mathbf{v} = \int \left( \nabla_v f \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right\} \right) d\mathbf{v} - \int f \left( \nabla_v \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right\} \right) d\mathbf{v}.$$

В последнем выражении первый интеграл справа можно преобразовать, используя теорему Гаусса, в интеграл по бесконечно удаленной поверхности в пространстве скоростей. Поскольку не может быть частиц с бесконечной скоростью и энергией,  $f$  на этой поверхности обращается в нуль и, следовательно, первый интеграл равен нулю.

Во втором интеграле справа  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  не зависят от скорости, поэтому  $(\nabla_v [\mathbf{v}\mathbf{B}]) = 0$ , что нетрудно показать. Поэтому последний интеграл в уравнении (1.60) обращается в нуль:

$$\frac{\partial}{\partial t} N(\mathbf{r}, t) + (\nabla_r N\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)) = 0. \quad (1.61)$$

Это уравнение выражает закон сохранения числа частиц в обычном пространстве. Получение такого результата не может удивлять, поскольку само уравнение Лиувилля выведено в § 1.8 из уравнения сохранения числа частиц

в фазовом пространстве и уравнения Ньютона для движения частицы.

Можно ожидать, что мы также придем снова к уравнениям сохранения энергии и количества движения.

Уравнения для моментов следующего порядка получаются умножением уравнения (1.59) на каждую компоненту скорости  $v_i$  и интегрированием по всему пространству скоростей. Результат имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (N\bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (N\bar{v}_i v_j) + \\ & + \frac{e}{m} \int v_i \left( \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right\} \nabla_v f \right) dv = 0. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Интеграл в этом выражении можно преобразовать, взяв его по частям:

$$\begin{aligned} \int v_i \left( \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right\} \nabla_v f \right) dv &= - \int f \left( \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right\} \nabla_v v_i \right) dv = \\ &= - \int f \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right\} dv = -NE_i - \frac{1}{c} N[\bar{\mathbf{vB}}]. \end{aligned}$$

При подстановке этого результата в уравнение (1.62) получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (Nm\bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (Nm\bar{v}_i v_j) = +\rho E_i + [\mathbf{jB}]_i, \quad (1.63)$$

где  $\rho$  — плотность заряда (в электростатических единицах), а  $\mathbf{j}$  — плотность электрического тока (в электромагнитных единицах). В соответствии с нашими ожиданиями выведенное уравнение совпадает с уравнением (1.17) и является законом сохранения количества движения.

Можно также получить шесть уравнений для следующих моментов функции распределения, умножив уравнение (1.59) на  $v_i v_j$  и опять проинтегрировав по пространству скоростей. Поступая как раньше, можно найти

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (N\bar{v}_i v_j) + \frac{\partial}{\partial x_k} (N\bar{v}_i v_j v_k) - \\ & - \frac{e}{m} \int f \left( \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right\} \nabla_v (v_i v_j) \right) dv = 0. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Если выполнить векторное дифференцирование под знаком интеграла, то последний член принимает вид

$$\frac{e}{m} \int f \left\{ \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right)_i v_j + \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right)_j v_i \right\} dv. \quad (1.65)$$

Для произвольных  $i$  и  $j$  это выражение нельзя упростить дальше. Однако если положить  $i = j$  и просуммировать, умножив на  $\frac{m}{2}$ , то можно получить простой результат:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} N m \bar{v}^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{2} N m \bar{v}^2 \bar{v}_k \right) = c (\mathbf{jE}). \quad (1.66)$$

Это уравнение выражает закон сохранения энергии и совпадает с равенством (1.44).

Уравнения (1.63) и (1.66) выражают законы сохранения, поскольку они могут быть представлены в форме

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{плотность}) + \nabla (\text{плотность потока}) = 0. \quad (1.67)$$

Так как левые части уравнений (1.63) и (1.66) уже имеют такой вид, необходимо только показать, что и правые стороны могут быть представлены в аналогичной форме. А это уже было доказано в § 1.3 и 1.6. Можно ли подобным путем получить следующие законы сохранения? Например, являются ли шесть уравнений (1.64) законами сохранения? Ответ гласит — нет. Действительно, уравнение (1.65) не может быть преобразовано к виду (1.67) хотя бы потому, что оно содержит члены вида  $v_i v_k$ , которые нельзя выразить, подобно плотности заряда и плотности тока, через напряженности полей или какие-либо другие величины. Для уравнений, содержащих моменты более высокого порядка, ответ на этот вопрос также отрицательный.

Имеется еще одна сохраняющаяся физическая величина, а именно момент количества движения относительно какой-либо точки. Запишем закон сохранения количества движения (1.21) в виде

$$\frac{\partial \mathcal{G}_j}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{P}_{jl}}{\partial x_l} = 0,$$

где  $\mathcal{G}$  — полная плотность импульса системы, а  $\mathcal{P}_{jl}$  — полная плотность потока импульса системы. Умножив это уравнение векторно на радиус-вектор  $\mathbf{r}$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (x_i \mathcal{G}_j - x_j \mathcal{G}_i) + x_i \frac{\partial}{\partial x_l} \mathcal{P}_{jl} - x_j \frac{\partial}{\partial x_l} \mathcal{P}_{il} = 0.$$

Но

$$x_i \frac{\partial}{\partial x_l} \mathcal{P}_{jl} = \frac{\partial}{\partial x_l} x_i \mathcal{P}_{jl} - \mathcal{P}_{il} \frac{\partial x_i}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_l} x_i \mathcal{P}_{jl} - \mathcal{P}_{ji}$$

$$x_j \frac{\partial}{\partial x_l} \mathcal{P}_{il} = \frac{\partial}{\partial x_l} x_j \mathcal{P}_{il} - \mathcal{P}_{ij}.$$

Следовательно, учитывая симметричность  $\mathcal{P}_{ij}$ , имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} (x_i \mathcal{G}_j - x_j \mathcal{G}_i) + \frac{\partial}{\partial x_l} (x_i \mathcal{P}_{jl} - x_j \mathcal{P}_{il}) = 0. \quad (1.68)$$

Таким образом, момент импульса  $[\mathbf{r} \mathcal{G}]$  сохраняется при условии, что сам импульс сохраняется, а тензор плотности потока импульса симметричен. Поэтому закон сохранения момента импульса не является независимым уравнением.

Сказанное не означает, что моменты более высокого порядка уравнения Лиувилля не приводят к новым уравнениям. Такие уравнения могут быть получены, но они не являются законами сохранения. При образовании моментов были исключены компоненты скоростей из числа независимых переменных и получена бесконечная система уравнений в частных производных по времени и пространству. Эта система уравнений обладает неудобной особенностью: число неизвестных величин, содержащихся в каждом  $n$  уравнении этого ряда, превышает  $n$ . Например, десять уравнений (1.61), (1.63) и (1.64) содержат не только десять величин  $N$ ,  $v_i$ ,  $v_i v_j$ , но и десять величин  $v_i v_j v_k$ . Такая система уравнений не может быть последовательно разрешена, и поэтому математически эта задача неразрешима. Тем не менее, делая некоторые физические допущения, можно получить ее приближенное решение, как это будет показано в следующем параграфе.

### § 1.10. Магнитогидродинамическое приближение

В обычных газах при не сильном отклонении от нормальных условий высокая частота столкновений частиц оказывает решающее воздействие на функцию распределения  $f$ . Именно столкновения определяют максвелловский или близкий к нему вид этой функции. Максвелловское распределение может быть наложено на некоторое среднее состояние, и тогда функция распределения имеет вид

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = N \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left[ \frac{-m(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}})^2}{2kT} \right]. \quad (1.69)$$

Здесь  $N$ ,  $\bar{v}$  и  $T$  могут зависеть от  $\mathbf{r}$  и  $t$ . Если эти величины несильно меняются на протяжении одной длины свободного пробега, формула (1.69) является хорошим приближением к действительному виду функции распределения.

В задачах, которые нас интересуют, частота столкновений не всегда достаточно высока, чтобы обеспечить распределение, близкое к максвелловскому. Тем не менее максвелловская форма функции распределения в подавляющем большинстве случаев из-за своей простоты может служить по крайней мере для приблизительной оценки.

Посмотрим, какой вид принимают законы сохранения при подстановке в них выражения (1.69)\*.

Закон сохранения массы (1.61) не изменяется при учете выражения (1.69). Тензор плотности потока импульса принимает вид (1.15), в котором выражение для тензора давления  $p_{ij}$  дается равенством (1.16). Поэтому уравнение сохранения количества движения (1.63) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (Nm\bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (Nm\bar{v}_i \bar{v}_j) + \frac{\partial}{\partial x_i} (NkT) = \rho E_i + [\mathbf{j}\mathbf{B}]_i, \quad (1.70)$$

где

$$\rho = Ne; \quad \mathbf{j} = \frac{1}{c} Ne\bar{v}. \quad (1.19)$$

Далее

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (Nm\bar{v}_i) &= m\bar{v}_i \frac{\partial N}{\partial t} + mN \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial x_j} (Nm\bar{v}_i \bar{v}_j) &= m\bar{v}_i \nabla (N\bar{v}) + mN\bar{v}\nabla\bar{v}_i. \end{aligned}$$

Используя полученные равенства, а также закон сохранения массы, можно преобразовать уравнение (1.70) к виду

$$\rho_m \frac{d\bar{v}_i}{dt} \equiv \rho_m \left( \frac{\partial}{\partial t} + (\bar{v}\nabla) \right) \bar{v}_i = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho E_i + [\mathbf{j}\mathbf{B}]_i, \quad (1.71)$$

где  $\rho_m = N_m$  — плотность частиц, а  $p = NkT$  — давление. Уравнение (1.71) является обычным гидродинамическим уравнением Эйлера с учетом действующих на каждый элемент объема электромагнитных сил.

\* Поскольку при столкновениях масса, импульс и энергия сохраняются, введение члена столкновений в уравнение Лиувилля не изменит общего вида законов сохранения.



Подставим функцию распределения (1.69) в уравнение сохранения энергии (1.66).

Из уравнения (1.15) имеем

$$\frac{1}{2} Nm\bar{v}^2 = \frac{1}{2} Nm(\bar{\mathbf{v}})^2 + \frac{3}{2} NkT, \quad (1.72)$$

а из уравнения (1.43')

$$\frac{1}{2} Nm\overline{v_k^2} = \frac{1}{2} Nm(\bar{\mathbf{v}})^2 \bar{v}_k + \frac{5}{2} NkT \bar{v}_k. \quad (1.73)$$

Учитывая эти выражения, можно преобразовать уравнение (1.66) к следующему виду:

$$\begin{aligned} Nm\bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{1}{2} m(\bar{v})^2 \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} (NkT) + Nm\bar{v}_i v_k \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \\ + \frac{1}{2} m(\bar{v})^2 \frac{\partial}{\partial x_k} (N\bar{v}_k) + \frac{5}{2} \bar{v}_i \frac{\partial}{\partial x_i} (NkT) + \\ - \frac{5}{2} NkT \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = c_j E_i. \end{aligned}$$

В этом уравнении второй и пятый члены уничтожаются в силу равенства (1.61). Первый, четвертый и часть шестого членов также обращаются в нуль ввиду уравнения (1.71) (если его предварительно умножить на  $\bar{v}_i$  и просуммировать). Остающиеся члены имеют вид

$$\frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} (NkT) + \frac{3}{2} \bar{v}_i (NkT) + \frac{5}{2} NkT \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1.74)$$

Далее, согласно уравнению (1.61), получим

$$N \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = - \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) N = - \frac{dN}{dt},$$

где  $\frac{d}{dt}$  — субстанциональная производная, взятая вдоль траектории элемента объема. Поэтому можно преобразовать уравнение (1.74) к виду

$$\frac{3}{2} \frac{d}{dt} (NkT) - \frac{5}{2} kT \frac{dN}{dt} = 0 \quad (1.75)$$

или, заменив  $NkT$  давлением  $p$ , — к виду  $3 \frac{dp}{p} = 5 \frac{dN}{N}$ .

Таким образом, для выделенного элемента объема при его движении сохраняется справедливое соотношение

$$p \sim N^{5/3}, \quad (1.76)$$

которое выражает уравнение состояния в адиабатическом случае с показателем политропы  $\gamma = 5/3$ .

Трех уравнений

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla N \bar{v} = 0; \quad (1.61)$$

$$\rho_m \frac{d\bar{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{E} + [j\mathbf{B}]; \quad (1.71)$$

$$p = NkT \quad (1.77)$$

совместно с уравнением (1.76) и уравнениями Максвелла достаточно для определения состояния системы по заданным начальным условиям. Счастливым обстоятельством избавления от необходимости иметь дело с высшими моментами функции распределения мы целиком обязаны принятому простому виду этой функции (1.69). В этом приближении она характеризуется пятью параметрами, а мы имеем как раз пять уравнений для их отыскания.

Действительно, поскольку уравнения для других моментов не являются законами сохранения (см. сноску на стр. 31), нельзя пренебрегать при их выводе членом столкновений, так как было предположено, что частота столкновений достаточно высока для обеспечения поддержания максвелловского характера распределения по скоростям. Например, если в общем уравнении для моментов второго порядка (1.64) положить  $i = j$ , но не суммировать по  $i$ , то получим

$$\frac{d}{dt} (NkT) - kT \left[ \frac{dN}{dt} - 2N \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} \right] = 0. \quad (1.78)$$

При суммировании по  $i$  это уравнение, естественно, совпадет с уравнением (1.75), но в том виде, в котором оно записано, его можно будет согласовать с формулой (1.75), только если  $\frac{d\bar{v}_i}{dx_i}$  (суммирования по  $i$  нет) равняется  $(\nabla \bar{v})/3$ , т. е. если сжатие, пропорциональное  $\frac{d\bar{v}_i}{dx_i}$ , одинаково во всех направлениях.

При сжатии только в направлении одной оси, например  $x$ , уравнение (1.78) противоречит формуле (1.75). Причина заключается в том, что при сжатии вдоль этой оси вначале возрастает слагающая энергии, связанная с  $\delta v_x$ , и только впоследствии в результате столкновений это увеличение энергии распределяется между всеми степенями свободы. Если бы добавить в уравнение Лиувилля член, описывающий столкновения, в уравнении (1.78) справа появился бы член, также обусловленный столкновениями, благодаря которому уравнение (1.78) для достаточно медленных сжатий согласовалось бы с уравнением (1.75).

При суммировании уравнения (1.78) по  $i$  члены столкновений выпадали бы, поскольку они отражают лишь перераспределение энергии между степенями свободы. Изложенный пример иллюстрирует, насколько рискованно считать распределение максвелловским при недостаточно большой частоте столкновений. Как мы видели, при сжатии в одном направлении слагающая энергия, соответствующая этому направлению, может измениться.

Система уравнений (1.61), (1.71), (1.76) и (1.77) образует основу теории, называемой магнитной гидродинамикой. Обычно в ней фигурируют две системы уравнений — для электронов и для ионов. Иногда используются также несколько иные уравнения адиабаты и другие приближенные методы.

# Г Л А В А 2

## МЕТОД ОРБИТ

### § 2.1. Введение

Помимо законов сохранения, рассмотренных в гл. 1, имеются еще два метода, с помощью которых можно описать поведение плазмы. В этой главе будет развит один из них — метод орбит, а в гл. 3 и 4 применим его соответственно к статическим и динамическим задачам. Метод орбит рассматривает поведение траекторий отдельных частиц, суммируя которые получают плотность зарядов и ток, подставляемые далее в уравнения Максвелла. Второй метод основан на использовании уравнения Максвелла, причем более точном и детальном, чем в § 1.9. Основная идея этого метода заключается в разложении решения в ряд по параметру  $m/e$ , который считается малым. Это по существу эквивалентно предположению о малости ларморовского радиуса в теории орбит. Действительно, оба метода очень близки, основное их различие заключается в том, что уравнение Лиувилля учитывает траектории всех частиц одновременно.

Остановимся подробно на методе орбит потому, что он позволяет глубже понять физическую сторону плазменных явлений. С другой стороны, описание плазмы с помощью уравнения Лиувилля отличается изяществом и, возможно, несколько большей строгостью.

Читателям, желающим получить более глубокое знание физики плазмы, можно рекомендовать одно из изложений этого метода, например, в серии статей Чандрасекара и др.\*

---

\* S. Chandrasekhar et al. Ann. Phys. (N. Y.), 2, 435 (1957); 5, 1 (1958.)

## § 2.2. Ларморовские окружности

Рассмотрение метода орбит начнем с изучения полей простейших конфигураций и затем обобщим результаты на любые, медленно меняющиеся поля. В нулевом приближении примем во внимание лишь постоянные во времени и пространстве магнитные поля, не учитывая электрические. Сила, действующая на заряженную частицу, равна

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}]. \quad (2.1)$$

Она не имеет компоненты, параллельной  $\mathbf{B}$ . Поэтому компонента скорости, параллельная  $\mathbf{B}$ , сохраняется постоянной. Кинетическая энергия, связанная с этой компонентой

$$\omega_{\parallel} = \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2, \quad (2.2)$$

величина также постоянная. Более того, поскольку в этом случае сила Лоренца не имеет составляющей, параллельной скорости частицы, полная кинетическая энергия

$$\omega = \frac{1}{2} m v^2 \quad (2.3)$$

остается постоянной. Отсюда следует, что кинетическая энергия  $\omega_{\perp}$ , связанная с компонентой скорости  $v_{\perp}$ , т. е. лежащей в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{B}$ , также постоянна и равна

$$\omega_{\perp} = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 = \omega - \omega_{\parallel}. \quad (2.4)$$

В системе координат, движущейся со скоростью  $\mathbf{v}_{\parallel}$ , траектория частицы представляет собой окружность. Радиус этой окружности, называемый ларморовским радиусом, может быть получен путем приравнивания центробежной и лоренцевой сил:

$$\frac{m v_{\perp}^2}{a} = \frac{e}{c} v_{\perp} B \quad \text{или} \quad a = \frac{m v_{\perp} c}{e B}. \quad (2.5)$$

Угловая скорость частицы  $\omega_l$ , называемая ларморовской частотой, выражается следующим образом:

$$\omega_l = \frac{v_{\perp}}{a} = \frac{e B}{m c}. \quad (2.6)$$

Заряды противоположного знака вращаются по ларморовской окружности в противоположных направлениях. Направление движения определяется тем, что сила, действующая на частицу, должна быть направлена к центру вращения.

В лабораторной системе координат центр окружности, называемый иногда ведущим центром, движется вдоль силовой линии с постоянной скоростью  $v_{\parallel}$  так, что траектория в этой системе представляет спираль.

### § 2.3. Магнитный момент и ток намагничивания

Круговое движение заряженной частицы создает магнитный момент.

$$\mu = \text{ток} \times \text{площадь} = \left( \frac{e\omega l}{2\pi c} \right) \pi a^2 = \frac{\omega_{\perp}}{B}, \quad (2.7)$$

направление которого антипараллельно  $\mathbf{B}$ . Это означает, что магнитное поле, создаваемое частицей (рис. 2.1), вычитается из внешнего магнитного поля в области, заклю-

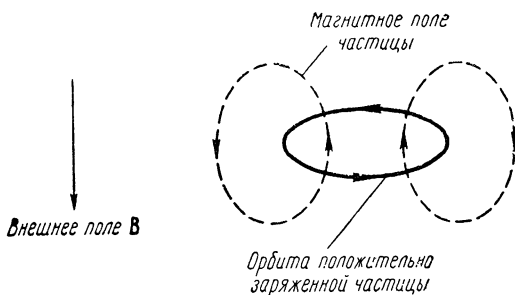


Рис. 2.1. Магнитный момент свободной частицы.

ченной внутри траектории, и складывается во внешней области, т. е. свободные заряженные частицы ведут себя диамагнитно. Написанное в векторной форме выражение для магнитного момента имеет вид

$$\boldsymbol{\mu} = - \left( \frac{\omega_{\perp}}{B} \right) \mathbf{B}_0, \quad (2.8)$$

где  $\mathbf{B}_0$  — единичный вектор в направлении  $\mathbf{B}$ .

Поведение многих заряженных частиц может заметно повлиять на приложенное магнитное поле. Поле, образуемое заряженными частицами, испытывает нерегулярные изменения в пространстве и времени. Однако эти флуктуации малы в сравнении со средним значением поля, если в объеме размерами порядка ларморовского радиуса находится достаточно много частиц и если отношения фаз движения различных частиц по своим траекториям совершенно случайны. Среднее поле легче всего вычислить по средним токам, связанным с распределением траекторий.

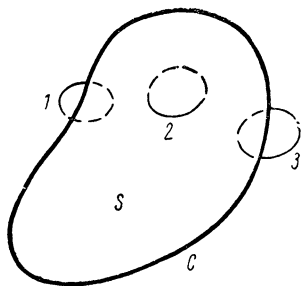


Рис. 2.2. Суммарный эффект токов намагничивания.

Рассмотрим элемент поверхности  $S$ , ограниченный замкнутой кривой  $C$ , как это изображено на рис. 2.2. Подсчитаем суммарный ток через этот элемент поверхности при пересечении ее траекториями отдельных частиц. Траектория 2 (см. рис. 2.2), пересекающая поверхность дважды, не вносит вклада в средний ток. Только траекто-

рии типа 1 и 3, охватывающие ограничивающую кривую  $C$ , вносят такой вклад.

Пусть  $dl$  — элемент длины кривой  $C$ . Если в единице объема находится  $N$  замкнутых траекторий, несущих ток  $I$  и имеющих площадь  $A$ , то общее число ларморовских окружностей, пронизанных элементом  $dl$  будет равно  $NA \cdot dl$ , а суммарный ток через поверхность  $S$

$$I_n = \int_C NIA \cdot dl = \int_C \mathbf{M} dl = \int_S (\text{rot } \mathbf{M} dS),$$

где  $\mathbf{M} = NIA$  — магнитный момент единицы объема, или намагниченность. Последняя форма выражения для тока получена с помощью теоремы Стокса.

Будем считать, что этот суммарный ток обусловлен некоторой средней плотностью тока  $\mathbf{j}_m$  и выражается через нее следующим образом:

$$I_n = \int_S (\mathbf{j}_m dS).$$

Используя это определение, можно написать

$$\int_S (\mathbf{j}_m d\mathbf{S}) = \int_S (\text{rot } \mathbf{M} d\mathbf{S}),$$

и поскольку это уравнение справедливо для любого элемента поверхности  $S$ , из него следует

$$\mathbf{j}_m = \text{rot } \mathbf{M}. \quad (2.9)$$

Ток, соответствующий  $\mathbf{j}_m$ , называется током намагничивания. Он может быть отличным от нуля, даже если центры ларморовских окружностей покоятся. В частности, в приведенном выше выводе они действительно покоились.

Уравнение (2.9) является основой классической теории магнетиков. В уравнении Максвелла (1.4) можно разделить ток на две части: внешние токи  $\mathbf{j}_e$  и токи намагничивания  $\mathbf{j}_m$ , — и написать

$$\text{rot } \mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j}_m + 4\pi\mathbf{j}_e + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi \text{rot } \mathbf{M} + 4\pi\mathbf{j}_e + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Определяя чисто математически величину

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}, \quad (2.10)$$

можно получить уравнение

$$\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j}_e + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.11)$$

Другие уравнения Максвелла при этом не претерпевают изменений. Плотность зарядов связана только с внешними токами, поскольку, согласно уравнению (2.9),

$$\text{div } \mathbf{j}_m = 0. \quad (2.12)$$

Удобство введения величины  $\mathbf{H}$  в основном зависит от выполнения соотношений  $\mathbf{M} \sim \mathbf{B}$  или  $\mathbf{M} = \alpha\mathbf{B}$ , приводящих к зависимости  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ , где  $\mu = 1/(1-4\pi\alpha)$ . В нашей же задаче  $M \sim 1/B$  и введение  $\mathbf{H}$  не создает дополнительных удобств. В дальнейшем будем считать  $\mathbf{j}_m$  частью общего тока. Для магнитного момента единицы объема среды приведем формулу

$$\mathbf{M} = -\left(\frac{N\omega_{\perp}}{B}\right)\mathbf{B}_0, \quad (2.13)$$

где  $\omega_{\perp}$  — энергия, соответствующая поперечному движению частиц. В дальнейшем будем ее называть просто поперечной энергией.



## § 2.4. Влияние постоянного электрического поля

Предположим теперь, что в дополнение к постоянному магнитному полю имеется еще постоянное электрическое поле.

Если электрическое поле  $\mathbf{E}$  имеет компоненту, параллельную  $\mathbf{B}$ , то центры ларморовских окружностей будут просто двигаться ускоренно вдоль силовых линий поля  $\mathbf{B}$  в соответствии с законом Ньютона.

Влияние перпендикулярной  $\mathbf{B}$  компоненты электрического поля несколько сложнее. Положим, что электрическое поле перпендикулярно магнитному. Уравнение движения

$$m\dot{\mathbf{v}} = e \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right\}, \quad (2.14)$$

можно упростить подстановкой

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_1, \quad (2.15)$$

где

$$\mathbf{v}_E = c \frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}]}{B^2}, \quad (2.16)$$

а  $\mathbf{v}_1$  должно быть найдено.

Поскольку

$$\frac{1}{c} [\mathbf{v}_E \mathbf{B}] = [\mathbf{E}\mathbf{B}] \mathbf{B} / B^2 = -\mathbf{E},$$

то уравнение (2.14) сводится к виду

$$m\dot{\mathbf{v}}_1 = \frac{e}{c} [\mathbf{v}_1 \mathbf{B}]. \quad (2.17)$$

Это уравнение движения заряженной частицы в магнитном поле. Таким образом, движение состоит из обычного (ларморовского) вращения вокруг силовой линии  $\mathbf{B}$  и наложенного на него движения со скоростью  $\mathbf{v}_E$ . Скорость  $\mathbf{v}_E$  назовем скоростью электрического дрейфа. При этом дрейфы силы, обусловленные действием электрического и магнитного полей, в среднем компенсируются.

Скорость электрического дрейфа одинакова для всех частиц независимо от их заряда и энергии. Следовательно, в нейтральной плазме этот дрейф не приводит к возникновению электрического тока. Если же плазма не нейтральная, то в ней в результате этого дрейфа возникает ток, направленный перпендикулярно  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ .

Наш вывод скорости дрейфа был основан на нерелятивистском уравнении движения (2.14). Поэтому уравнение (2.16) перестает быть справедливым, если  $\mathbf{E}_\perp > \mathbf{V}$ , так как в этом случае  $v_E > c$ . Наиболее просто можно исследовать релятивистский случай с помощью преобразований Лоренца. Всегда можно (за исключением случая, который будет указан ниже) совершить преобразование к такой системе координат, в которой  $\mathbf{E}$  параллельно  $\mathbf{V}$ . Поскольку вначале  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{V}$  были перпендикулярны и поскольку  $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{V})$  является инвариантом преобразований Лоренца, в новой системе либо  $\mathbf{E}$ , либо  $\mathbf{V}$  должны обращаться в нуль. Если вначале  $E$  было меньше  $V$ , то после преобразования  $\mathbf{E}$  должно равняться нулю, а скорость новой системы отсчета будет даваться уравнением (2.16). Если же  $E > V$ , то после преобразования  $\mathbf{V}$  должно обратиться в нуль, а скорость новой системы отсчета будет равна  $c[\mathbf{E}\mathbf{V}]/B^2$ . В случае, когда  $E = V$ , указанное преобразование не может быть, очевидно, осуществлено, поскольку скорость системы отсчета становится равной  $c$ .

Практический вывод из этого анализа сводится к тому, что если  $E > V$ , то магнитное поле не может помешать движению частицы в направлении  $\mathbf{E}$ . В дальнейшем, однако, будем иметь дело со случаями, когда  $E < V$ .

### § 2.5. Переменное электрическое поле и диэлектрическая проницаемость плазмы

Как было показано ранее, постоянное электрическое поле, направленное перпендикулярно  $\mathbf{V}$ , не приводит к возникновению тока. В случае же переменных электрических полей такой ток, пропорциональный  $\frac{\partial \mathbf{E}_\perp}{\partial t}$ , может существовать. Поэтому плазма является диэлектриком.

Убедиться в этом можно, несколько обобщив метод решения уравнения движения, применяемый в § 2.4. Предположим снова, что  $\mathbf{E}$  перпендикулярно  $\mathbf{V}$ , но зависит от времени (поле  $\mathbf{V}$  по-прежнему считаем постоянным).

Разделим опять уравнение (2.15) с помощью введения скорости  $\mathbf{v}_E$ , определенной по формуле (2.16). Поскольку  $\mathbf{v}_E$  теперь зависит от времени, вместо уравнения (2.17) можно записать

$$m\dot{\mathbf{v}}_1 + m\dot{\mathbf{v}}_E = \frac{e}{c} [\mathbf{v}_1 \mathbf{V}]. \quad (2.18)$$

Если бы скорость  $\dot{\mathbf{v}}_E$  была постоянной (или почти постоянной), это уравнение можно решить тем же способом, что и уравнение (2.14), отличающееся от (2.18) заменой  $e\mathbf{E}$  на  $-m\dot{\mathbf{v}}_E$ .

Положим  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_2$ , причем

$$\mathbf{v}_p = -\frac{mc}{e} \frac{[\dot{\mathbf{v}}_E \mathbf{B}]}{B^2} = \frac{mc^2}{eB^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.19)$$

Тогда уравнение (2.18) принимает вид

$$m\dot{\mathbf{v}}_2 + m\dot{\mathbf{v}}_p = \frac{e}{c} [\mathbf{v}_2 \mathbf{B}]. \quad (2.20)$$

Предположим теперь, что в этом уравнении членом  $m\dot{\mathbf{v}}_p$  можно пренебречь. Остающиеся члены тогда соответствуют движению частицы в одном магнитном поле, являющемуся, как нам уже известно, движением по кругу. На это движение по окружности накладываются два дрейфовых движения со скоростями  $\mathbf{v}_E$  и  $\mathbf{v}_p$ . Отметим, что величина круговой скорости  $v_2$ , а следовательно, и кинетическая энергия вращательного движения не зависят от  $\mathbf{E}$ .

Отношение члена  $m\dot{\mathbf{v}}_p$  к правой части уравнения (2.20) можно оценить по абсолютной величине следующим образом:

$$\frac{m\dot{v}_p}{(e/c)v_2B} = \left(\frac{mc}{eB}\right)^2 \frac{c\ddot{E}}{v_2B} = \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 \frac{v_E}{v_2},$$

где  $v$  — частота электрического поля.

Таким образом, отброшенный член действительно мал, пока частота электрического поля мала по сравнению с ларморовской частотой и при условии, что скорость электрического дрейфа не слишком велика в сравнении с круговой скоростью  $v_2$ .

Так как скорость  $\mathbf{v}_p$  имеет противоположные направления для зарядов разноименных знаков, в результате может возникнуть ток и в нейтральной плазме. Плотность этого тока для одного сорта частиц имеет величину

$$\mathbf{j}_p = \frac{Nev_p}{c} = N \frac{mc^2}{B} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.21)$$

Назовем вектор  $\mathbf{j}_p$  током поляризации, поскольку он возникает при смещении положительных и отрицательных

зарядов друг относительно друга в переменном электрическом поле.

С другой стороны, ток  $\mathbf{j}_p$  можно рассматривать как часть полного тока, однако его можно учесть и путем введения диэлектрической постоянной. Для этого разобьем полный ток  $\mathbf{j}$  на  $\mathbf{j}_p$  и все другие токи  $\mathbf{j}_0$ :

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_p. \quad (2.22)$$

Тогда уравнение (1.4) примет вид

$$\text{rot } \mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j}_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.23)$$

где

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \varepsilon = 1 + \frac{4\pi N m c^2}{B^2}. \quad (2.24)$$

Разделим на две части также плотность зарядов:

$$\rho = \rho_0 + \rho_p, \quad (2.25)$$

где

$$\rho_p = - \frac{N m c^2}{B^2} \text{div } \mathbf{E}. \quad (2.26)$$

Поскольку  $\rho_p$  и  $\mathbf{j}_p$  удовлетворяют уравнению сохранения заряда,  $\rho_p$  можно рассматривать как заряд, создаваемый токами поляризации;  $\rho_0$  — плотность заряда, возникающего за счет всех остальных причин. Если воспользоваться уравнением (2.25), то из уравнения Максвелла (1.1) можно получить

$$\text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho_0. \quad (2.27)$$

Все другие уравнения Максвелла при этом остаются без изменений.

Диэлектрическая постоянная  $\varepsilon$  может достигать больших значений. Для случая дейтерия

$$\varepsilon = 1 + 3,7 \cdot 10^{-2} \frac{N}{B^2}. \quad (2.28)$$

При  $B = 10^4$  гс и  $N = 10^{15}$  дейтрон/см<sup>3</sup>  $\varepsilon \approx 3,7 \cdot 10^5$ . Ларморовская частота в этом случае  $\omega \approx 5 \cdot 10^7$  сек<sup>-1</sup>. Такая большая диэлектрическая постоянная может оказывать весьма заметное влияние на свойства электромагнитных колебаний в плазме, как в этом мы убедимся позднее.

Вычислим количество энергии, запасенной в плазме за счет ее диэлектрических свойств. Плотность энергии самого электрического поля согласно уравнению (1.7)

$$\mathcal{E}_E = \frac{E^2}{8\pi}.$$

Плотность энергии частиц есть кинетическая энергия движения частиц с дрейфовой скоростью  $\mathbf{v}_E$ , определяемой уравнением (2.16):

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} N m v_E^2 = \frac{1}{2} N m c^2 \frac{E^2}{B^2}.$$

Кроме того, имеется еще кинетическая энергия вращательного движения, но она не зависит от  $\mathbf{E}$  и может быть опущена при расчете энергии, запасаемой в плазме за счет электрического поля. Суммарная плотность запасенной энергии тогда равна

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_E + \mathcal{E}_p = \frac{E^2}{8\pi} \left( 1 + \frac{4\pi N m c^2}{B^2} \right) = \frac{\epsilon}{8\pi} E^2 = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \mathbf{D}). \quad (2.29)$$

Полученный результат по форме совпадает с результатом для диэлектриков. Однако для обычного диэлектрика запасенная энергия имеет вид потенциальной энергии, связанной с работой атомных или молекулярных сил против смещения зарядов противоположного знака друг относительно друга. В плазме же, где нет таких сдерживающих сил, их место занимает кинетическая энергия электрического дрейфа.

Проанализируем, как частицы приобретают эту энергию дрейфа. Учитывая, что в соответствии с уравнением (2.19) центр ларморовской окружности при изменении  $\mathbf{E}$  на величину  $\delta\mathbf{E}$  смещается на расстояние

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{v}_p \delta t = \frac{m c^2}{e B^2} \delta \mathbf{E},$$

работа электрического поля над частицей равна

$$\delta W = e (\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{r}) = \frac{m c^2}{B^2} (\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{E}) = \delta \left( \frac{1}{2} \frac{m c^2 E^2}{B^2} \right) = \delta \left( \frac{1}{2} m v_E^2 \right).$$

Таким образом видно, что энергия дрейфового движения связана с работой, производимой полем над частицей в процессе поляризации среды. Этот вывод согласуется с тем, что энергия вращательного движения остается неизменной.

В этом параграфе было рассмотрено только влияние зависимости электрического поля от времени. Однако если плазма движется, а поле  $\mathbf{E}$  меняется в пространстве, то это скажется на поведении плазмы точно таким же образом, как изменение  $\mathbf{E}$  со временем\*.

## § 2.6. Влияние гравитации

Если на частицы действуют гравитационные силы или любая другая сила  $\mathbf{F}$ , то можно для этого случая воспользоваться результатами двух предшествующих параграфов, сделав при этом замену

$$\mathbf{E} \rightarrow \frac{\mathbf{F}}{e}, \quad (2.30)$$

Тогда, например, скорость дрейфа, вызванного гравитационной силой  $\mathbf{g}$ , составит

$$\mathbf{v}_g = \frac{mc}{e} \frac{[\mathbf{g}\mathbf{B}]}{B^2}. \quad (2.31)$$

Поскольку этот дрейф имеет разное направление для частиц противоположных знаков, он вызывает в нейтральной плазме электрический ток

$$\mathbf{j}_g = \frac{Nev_g}{c}. \quad (2.32)$$

## § 2.7. Влияние зависимости магнитного поля от времени

Если магнитное поле  $\mathbf{B}$  изменяется со временем, то в соответствии с уравнением Максвелла (1.2) возникает электрическое поле, которое вызывает кроме дрейфа и поляризации, описанных в § 2.4 и 2.5, еще один эффект. Поскольку возникающее таким образом электрическое поле не является потенциальным, интеграл от его величины, взятый вдоль всей ларморовской окружности, не обращается в нуль. А это означает, что энергия вращательного движения  $\omega_{\perp}$  может меняться.

Предположим, что поле  $\mathbf{B}$  постоянно в пространстве и меняется во времени. Введем систему с началом координат

---

\* Подробнее этот эффект рассмотрен в гл. 4.

в центре ларморовской окружности. В этой системе траекторией частицы будет окружность  $C$ . Изменение энергии вращательного движения частицы  $\delta\omega_{\perp}$  за один оборот равно

$$\delta\omega_{\perp} = \int_C (\mathbf{E} d\mathbf{l}) = \int_S (\text{rot } \mathbf{E} d\mathbf{S}),$$

где  $\mathbf{S}$  — вектор, представляющий плоскую поверхность, натянутую на орбиту частицы  $C$ . Используя уравнение (1.2) и не обращая внимания на знак, найдем

$$\delta\omega_{\perp} = \frac{1}{c} \int_S \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} d\mathbf{S} \right) = \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \pi a^2 = \left( \frac{mv_{\perp}^2}{2} \right) \left( \frac{2\pi mc}{eB} \right) \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial t}$$

или

$$\frac{\delta\omega_{\perp}}{\omega_{\perp}} = \frac{1}{B} \frac{2\pi}{\omega} \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\delta B}{B},$$

где  $\delta B$  — изменение величины  $B$  за один оборот. Из формулы следует, что  $\omega_{\perp}$  возрастает с увеличением  $B$ , так что знак выбран правильно. Этот результат можно представить и в такой форме:

$$\delta(\omega_{\perp}/B) = \delta\mu = 0. \quad (2.33)$$

Строго говоря, полученный вывод справедлив лишь тогда, когда  $B$  изменяется очень мало за время одного оборота. (В частности, можно заметить, что при изменении  $B$  траектория частицы больше не окружность). Поэтому в этом случае мы говорим, что магнитный момент является адиабатическим инвариантом.

Смысл формулы (2.33) можно выразить и по-иному, сказав, что угловой момент частицы или магнитный поток, охватываемый ее траекторией, суть адиабатические инварианты.

## § 2.8. Электрический дрейф и движение силовых линий магнитного поля

Иногда говорят, что дрейф в скрещенных полях  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{V}$ , описываемый уравнением (2.16), заставляет плазму перемещаться вместе с силовыми линиями  $\mathbf{B}$ . Исследуем смысл этого утверждения.

Понятие силовых линий и их движение не необходимы в теории поля. Теория поля оперирует с векторными функциями пространства и времени, называемыми полями, которым вовсе не обязательно приписывать реальное воплощение в виде силовых линий. Помимо всего, не существует однозначного способа для установления соответствия между полями и такими линиями. Тем не менее понятие силовых линий оказывается очень полезным в методе орбит.

Кроме того, эвристически иногда полезно представить себе магнитные силовые линии движущимися в пространстве.

Для подтверждения сказанного рассмотрим в качестве примера магнитное поле, создаваемое между двумя плоскими круглыми полюсами (рис. 2, 3).

Пусть поле  $\mathbf{B}$  направлено нормально к поверхности рисунка (от читателя), и растет по величине. В этом случае можно представить, что линии  $\mathbf{B}$  движутся к центру радиально из бесконечности, так что их плотность в центре возрастает. Индуцированное электрическое поле направлено по часовой стрелке и имеет величину  $E = \frac{r}{2c} \frac{dB}{dt}$ , где  $r$  — расстояние от центра. Частица, соответствующая ларморовской окружности с центром в  $r$ , смещается к оси со скоростью

$$-\frac{dr}{dt} = v_E = c \frac{E}{B} = \frac{r}{2B} \frac{dB}{dt},$$

поэтому

$$\frac{1}{B} \frac{dB}{dt} + \frac{2}{r} \frac{dr}{dt} = 0, \text{ или } \frac{d}{dt}(r^2 B) = 0.$$

Полученное выражение означает, что магнитный поток внутри контура, проходящего через центр ларморовской окружности, движущейся к центру частицы, сохраняется постоянным. Поэтому можно сказать, что частица и линии  $\mathbf{B}$  движутся к центру вместе. Отсутствие однозначности в определении линий  $\mathbf{B}$  в этом примере сказывается в том, что этим линиям можем приписать еще и некоторое

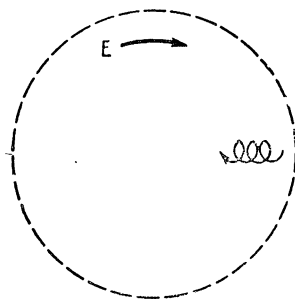


Рис. 2.3. Электрический дреф в переменном магнитном поле.



вращательное движение вокруг общего центра картины, не изменив при этом никаких наблюдаемых свойств поля  $\mathbf{B}$ . Вообще любое перемещение, сводящееся к перемене местами линии  $\mathbf{B}$ , не приводит ни к каким наблюдаемым изменениям. С целью доказательства справедливости сделанного в начале параграфа утверждения можно ввести еще ряд

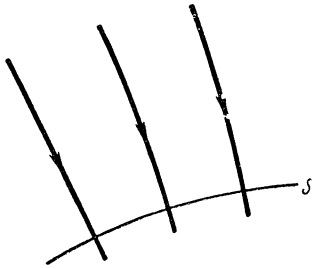


Рис. 2.4. Поверхность, перпендикулярная силовым линиям.

простых взаимных перемещений силовых линий.

И все же упомянутое утверждение не всегда справедливо, в частности, когда магнитное поле однородно, а электрическое — поле точечного заряда. Если силовые линии  $\mathbf{B}$  движутся в этом случае со скоростью  $\mathbf{v}_E$ , они будут искривляться.

Пределы справедливости приведенного утверждения устанавливаются с помощью двух теорем, которые можно доказать\*.

**Т е о р е м а 1.** Движение силовых линий  $\mathbf{B}$  можно всегда представить таким образом, что точки пересечения этих линий с некоторой поверхностью, направленной нормально к ним в данный момент, будут двигаться со скоростью  $\mathbf{v}_E$ .

Для доказательства этой теоремы предположим, что  $S$  — некоторая поверхность, в данный момент ортогональная силовым линиям  $\mathbf{B}$  (рис. 2.4). Плотность точек пересечения силовых линий  $\mathbf{B}$  с поверхностью пропорциональна напряженности  $B$  на этом участке поверхности  $S$ . Можно для удобства считать, что их плотность просто равна  $B$ . Для доказательства теоремы покажем, что если точки пересечения движутся со скоростью  $\mathbf{v}_E$  (вектор которой направлен по касательной к поверхности  $S$ ), то плотность этих точек меняется по тому же закону, что и  $B$ . На языке математики это означает справедливость следующего уравнения сохранения (для величин, взятых на поверхности  $S$ ):

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla_S (B \mathbf{v}_E) = 0. \quad (2.34)$$

\* Для более детального ознакомления см.:

W. N e w s o m b. Ann. Phys. (N. Y.), 3, 347 (1958).

Дивергенция в этом уравнении берется относительно двух координат на поверхности. Чтобы вычислить ее, введем в локальную систему прямоугольную систему координат с центром в рассматриваемой точке. Пусть ось  $z$  совпадает с направлением  $\mathbf{B}$ , а оси  $x$  и  $y$  лежат в плоскости, касательной к поверхности  $S$  в этой точке. Тогда  $Bv_{Ex} = cE_y$  и  $Bv_{Ey} = -cE_x$ . Поэтому

$$(\nabla_S \cdot B\mathbf{v}_E) = c \left[ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] = c \operatorname{rot}_z \mathbf{E} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \quad (2.35)$$

Помимо этого:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \frac{1}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} \times \\ &\times \left( B_x \frac{\partial B_x}{\partial t} + B_y \frac{\partial B_y}{\partial t} + B_z \frac{\partial B_z}{\partial t} \right) = \frac{\partial B_z}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

поскольку в начале  $B_x = B_y = 0$ . Из уравнений (2.35) и (2.36) видно, что уравнение (2.34) действительно справедливо и будет также удовлетворяться в том случае, если к  $\mathbf{v}_E$  добавить любой вектор  $\mathbf{v}'$ , такой, чтобы поверхностная дивергенция от  $B\mathbf{v}'$  обращалась в нуль. Таким образом, полученный результат справедлив не только для скорости дрейфа  $\mathbf{v}_E$ .

Если теперь рассмотреть две поверхности, ортогональные силовым линиям, то можно обнаружить, что для определенного вида движения линий  $\mathbf{B}$  точки пересечения не могут двигаться со скоростью  $\mathbf{v}_E$  по обеим поверхностям. Если по одной поверхности точки пересечения движутся со скоростью  $\mathbf{v}_E$ , то по другой они могут двигаться со скоростью  $\mathbf{v}_E + \mathbf{v}'$ , где  $B\mathbf{v}' \neq 0$ , но такова, что  $\operatorname{div}(B\mathbf{v}') = 0$ . Следовательно, необходимо найти условия, при которых точки пересечения на обеих поверхностях движутся со скоростью  $\mathbf{v}_E$ .

**Т е о р е м а 2.** Пусть  $\mathbf{E}_{\parallel}$  — компонента электрического поля, параллельная  $\mathbf{B}$ . При этом о линиях  $\mathbf{B}$  можно сказать, что они движутся со скоростью  $\mathbf{v}_E$  тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_{\parallel} - [\nabla \mathbf{E}_{\parallel}] \text{ коллинеарны } \mathbf{B}. \quad (2.37)$$

Пусть  $S_1$  и  $S_2$  — две близкие поверхности, ортогональные линиям  $B$  в момент времени  $t$  (рис. 2.5);  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — точки

пересечения некоторой выделенной линии  $\mathbf{B}$  с этими двумя поверхностями в момент  $t$ .

Положим, что точки  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , двигаясь со скоростями соответственно  $\mathbf{v}_E(t, \mathbf{a})$  и  $\mathbf{v}_E(t, \mathbf{b})$  в течение интервала  $\delta t$ , занимают в момент  $t + \delta t$  новые положения  $\mathbf{a}'$  и  $\mathbf{b}'$ . Необходимо показать, что точки  $\mathbf{a}'$  и  $\mathbf{b}'$  в момент времени  $t + \delta t$  обе лежат на линии  $\mathbf{B}$  тогда и только тогда, когда удовлетворяется уравнение (2.37). После этого в соответствии с теоремой I можно доказать, что новая линия  $\mathbf{B}$  есть смещенная на отрезок  $\mathbf{v}_E \delta t$  прежняя линия  $\mathbf{B}$ .

Задача будет решена, если будет доказано, что отрезок

$$\mathbf{b}' - \mathbf{a}' \text{ параллелен } \mathbf{B}(t + \delta t, \mathbf{a}'). \quad (2.38)$$

Представим разность  $\mathbf{b}' - \mathbf{a}'$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}' - \mathbf{a}' &= (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \\ &+ (\mathbf{b}' - \mathbf{b}) - (\mathbf{a}' - \mathbf{a}). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Рис. 2.5. Схема перемещения силовых линий  $\mathbf{B}$ .

Поскольку было предположено, что отрезок  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$  параллелен  $\mathbf{B}(t, \mathbf{a})$ , то

$$(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \varepsilon \mathbf{B}(t, \mathbf{a}), \quad (2.40)$$

где  $\varepsilon$  — бесконечно малая величина.

Используя уравнения (2.40) и (2.16), можно представить уравнение (2.39) в виде

$$\frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{b}' - \mathbf{a}') = \mathbf{B} + c \delta t (\mathbf{B} \cdot \nabla) \left( \frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}]}{B^2} \right), \quad (2.41)$$

где все значения  $\mathbf{B}$  взяты в момент  $t$  и в точке  $\mathbf{a}$ .

Найдем теперь выражение для вектора  $\mathbf{B}(t + \delta t, \mathbf{a}')$ , который для краткости обозначим  $\mathbf{B}'$ :

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} + \delta t \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + c \delta t \left( \frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}]}{B^2} \nabla \right) \mathbf{B}. \quad (2.42)$$

Если  $\mathbf{B}'$  параллелен  $\mathbf{b}' - \mathbf{a}'$ , то векторное произведение правых частей уравнений (2.41) и (2.42) должно обращаться в нуль. Достаточно, чтобы оно обращалось

в нуль с точностью до первого порядка по  $\delta t$ . Поэтому необходимо, чтобы

$$\left[ \mathbf{B} \left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \left( \frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}]}{B^2} \nabla \right) \mathbf{B} - (\mathbf{B}\nabla) \frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}]}{B^2} \right\} \right] = 0.$$

Это равенство будет справедливо, если выражение в фигурных скобках параллельно  $\mathbf{B}$ . Последние два члена в фигурных скобках можно заменить, используя тождество

$$\begin{aligned} \left[ \nabla \left[ \mathbf{B} \frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}]}{B^2} \right] \right] &= \left( \frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}]}{B^2} \nabla \right) \mathbf{B} + \mathbf{B} \left( \nabla \cdot \frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}]}{B^2} \right) - \\ &- (\mathbf{B}\nabla) \frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}]}{B^2} - \frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}]}{B^2} \nabla \mathbf{B}. \end{aligned}$$

В этом тождестве последний член справа равен нулю в силу уравнения Максвелла (1.3), а второй член параллелен  $\mathbf{B}$  и может быть опущен. Остающиеся два члена совпадают с двумя последними членами в фигурных скобках предыдущего уравнения. Поэтому, используя уравнение Максвелла (1.2), можно условие параллельности  $(\mathbf{b}' - \mathbf{a}')$  и  $\mathbf{B}'$  свести к условию параллельности выражения  $-\nabla[\mathbf{E}] + \nabla \left[ \mathbf{B} \frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}]}{B^2} \right]$  вектору  $\mathbf{B}$ . Далее, поскольку

$$\left[ \mathbf{B} \frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}]}{B^2} \right] = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{B}(\mathbf{B}\mathbf{E})}{B^2} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_{\parallel},$$

это условие сводится к тому, чтобы выражение

$$-\nabla[\mathbf{E}] + \nabla(\mathbf{E} - \mathbf{E}_{\parallel}) = \nabla \mathbf{E}_{\perp}$$

было параллельно  $\mathbf{B}$ . А это и требовалось доказать.

Практический вывод из теоремы 2 заключается в том, что если центры двух или более ларморовских окружностей лежат в некоторый момент на некоторой силовой линии  $\mathbf{B}$ , то они останутся на ней и в дальнейшем при выполнении условия теоремы.

Наиболее простыми, в которых теорема 2 оказывается выполненной, являются случаи, когда  $\mathbf{E}_{\parallel} = 0$ . Следующими по сложности будут случаи, в которых  $\text{rot } \mathbf{E}_{\parallel} = \nabla[\mathbf{E}_{\parallel}] = 0$ . Действительно, если  $\nabla[\mathbf{E}_{\parallel}] = 0$ , то можно полностью скомпенсировать  $\mathbf{E}_{\parallel}$  соответствующим образом подобранной плотностью заряда  $\rho = \frac{1}{4\pi} \text{div } \mathbf{E}_{\parallel}$ . Токи смогут быстро распространиться вдоль силовых линий  $\mathbf{B}$ , стремясь скомпенсировать  $\mathbf{E}_{\parallel}$ , хотя полная компенсация

таким путем не может быть достигнута. Если же  $[\nabla \mathbf{E}_{\parallel}] \neq 0$ , то  $\mathbf{E}_{\parallel}$  никаким выбором плотности зарядов нельзя скомпенсировать.

Одним из неочевидных случаев приложимости теоремы 2 является следующий. На магнитное поле тока в прямом проводнике наложено параллельное этому проводнику однородное поле, амплитуда которого меняется со временем. При этом индуцируется вихревое электрическое поле вокруг проводника, вызывающее радиальнонаправленный дрейф частиц. Силовые линии  $\mathbf{B}$  имеют в этом случае вид спиралей, шаг которых меняется во времени в системе координат дрейфующих сквозь них частиц.

В тех случаях, когда магнитное поле обладает так называемым широм, т. е. его силовые линии пересекаются между собой, теорема 2 обычно неприменима.

### § 2.9. Влияние пространственной неоднородности $\mathbf{B}$

Допустим теперь небольшую неоднородность магнитного поля, такую, что на расстояниях порядка ларморовского радиуса оно может изменяться лишь на малую долю своей величины, и рассмотрим влияние такой неоднородности магнитного поля с точностью до первой степени по  $\nabla \mathbf{B}$ .

Иследуем поле в окрестности какой-либо точки, которую примем за начало координат. Выберем правую декартову систему координат с осью  $z$  вдоль направления вектора  $\mathbf{B}$  в этой точке. Тогда

$$B_x(0) = B_y(0) = 0, \quad B_z(0) = B(0). \quad (2.43)$$

Векторная производная от  $\mathbf{B}$  есть тензор:

$$\nabla \mathbf{B} = \begin{array}{ccc} \left[ \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_x}{\partial z} \right] \\ \left[ \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial z} \right] \\ \left[ \frac{\partial B_z}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \right] \end{array} \quad (2.44)$$

Разобьем этот тензор на части, отмеченные пунктиром, и рассмотрим влияние выделенных членов по отдельности.

**А. Влияние углового расхождения линий В.** Рассмотрим сначала диагональные члены тензора  $\nabla \mathbf{V}$ . Эти члены не независимы, так как их сумма в соответствии с уравнением Максвелла (1.3) равна нулю. Если, например,  $\frac{\partial B_x}{\partial x}$  больше нуля, то линии  $\mathbf{V}$  в плоскости  $xOy$  выглядят расходящимися, как это изображено на рис. (2.6). Частица, описывающая ларморовскую траекторию, испытывает действие силы, имеющей компоненту  $F_{\parallel}$ , направленную параллельно осевой силовой линии  $\mathbf{V}$ . Среднее значение такой силы для данной орбиты пропорционально среднему значению радиальной компоненты  $B_r$ , взятой в точках орбиты:

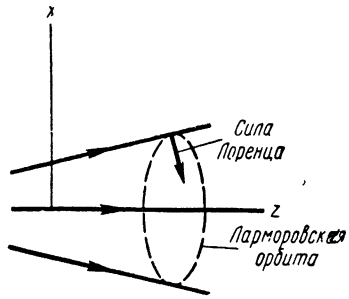


Рис. 2.6. Частица в магнитном поле с расходящимися силовыми линиями.

$$B_r = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) a = -\frac{1}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} a = \pm \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial z} a,$$

где  $a$  — ларморовский радиус. Далее в соответствии с уравнениями (1.6) и (2.5)

$$F_{\parallel} = \pm e \frac{v_{\perp}}{c} B_r = \frac{ev_{\perp}}{c} \frac{1}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{mv_{\perp} c}{eB} = \pm \frac{\omega_{\perp}}{B} \frac{\partial B}{\partial z}.$$

Для решения вопроса о знаке обозначим через  $S$  расстояние, измеряемое вдоль осевой силовой линии  $\mathbf{V}$ . Тогда

$$F_{\parallel} = -\frac{\omega_{\perp}}{B} \frac{\partial B}{\partial S} = -\mu \frac{\partial B}{\partial S}. \quad (2.45)$$

Если  $B$  возрастает в том же направлении, что и  $S$ , то сила направлена в противоположную сторону.

Эта параллельная осевой линии сила приводит к изменению во времени продольной компоненты скорости  $v_{\parallel}$ , согласно уравнению

$$-\frac{\omega_{\perp}}{B} \frac{\partial B}{\partial S} = m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = mv_{\parallel} \frac{dv_{\parallel}}{dS} = \frac{d\omega_{\parallel}}{dS} = \frac{d}{dS} (\omega - \omega_{\perp}).$$

Поскольку полная энергия  $w$  остается в магнитном поле постоянной, то

$$-\frac{w_{\perp}}{B} \frac{\partial B}{\partial S} = -\frac{dw_{\perp}}{dS}$$

или иначе

$$\frac{w_{\perp}}{B} = \mu = \text{const.} \quad (2.46)$$

Таким образом, видно, что магнитный момент при движении частицы через область поля, где его амплитуда меняется, также является адиабатическим инвариантом. Этот результат можно было получить и из уравнения (2.33) путем перехода в систему, где  $v_{\parallel} = 0$ . Тогда на частицу действовало бы переменное во времени магнитное поле.

Поскольку магнитный момент сохраняется постоянным, сила  $F_{\parallel}$ , определяемая уравнением (2.45), может быть получена как производная некоторого потенциала:

$$F_{\parallel} = -\frac{\partial}{\partial S} V_{\parallel}, \quad V_{\parallel} = \mu B. \quad (2.47)$$

Из этого выражения следует: если частица попадает в область, где величина  $B$  настолько велика, что  $\mu B$  превышает полную энергию частицы, она может отразиться от этой области.

Помимо этого, постоянство момента означает, что поток магнитного поля, заключенный внутри траектории частицы, постоянен. Именно поэтому на рис. 2.6 отсутствует компонента силы, касательная к траектории частицы, хотя присутствие такой компоненты можно было бы ожидать ввиду наличия  $v_{\parallel}$  и  $B_r$ .

**Б. Влияние кривизны силовых линий  $\mathbf{B}$ .** Рассмотрим члены  $\frac{\partial B_x}{\partial z}$  и  $\frac{\partial B_y}{\partial z}$ . Если  $\frac{\partial B_x}{\partial z}$ , например, больше нуля, то линии  $\mathbf{B}$  изогнуты так, как это показано на рис. 2.7. Если  $R$  — радиус кривизны линий, а  $\theta$  — угол, показанный на рис. 2.7, то

$$B_x = B \sin \theta \approx \frac{B}{R} z.$$

Поэтому

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{B}{R} \quad \text{или} \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{B} \frac{\partial B_x}{\partial z}. \quad (2.48)$$

Положим  $\frac{\partial B}{\partial z}$  равным нулю, поскольку влияние отличия  $\frac{\partial B}{\partial z}$  от нуля уже было изучено в пункте А этого параграфа.

Обычно радиус кривизны  $R$  выражают через единичный вектор, касательный к этой кривой. Пусть  $\mathbf{B}_0$  будет таким единичным вектором, совпадающим везде по направлению с  $\mathbf{B}$ . Тогда радиус кривизны линии  $\mathbf{B}$  в некоторой точке определится следующим образом:

$$\frac{\mathbf{R}}{R^2} = -(\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{B}_0. \quad (2.49)$$

В нашем случае из этой формулы следует:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{R}}{R^2} &= -\frac{\partial}{\partial z} \frac{\mathbf{B}}{B} = \\ &= -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{B} + \frac{\mathbf{B}}{B^2} \frac{\partial B}{\partial z}. \end{aligned}$$

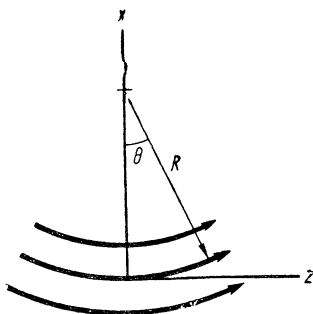


Рис. 2.7. Радиус кривизны силовых линий  $\mathbf{B}$ .

Этот результат согласуется с уравнением (2.48), поскольку было предположено  $\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$ . В дальнейшем будем использовать уравнение (2.49).

Предположим, что в нулевом приближении центр ларморовской окружности частицы движется вдоль изогнутой силовой линии  $\mathbf{B}$ . Тогда в дополнение к силе Лоренца частица будет испытывать еще и центробежную силу  $\mathbf{F} = m v_{\parallel}^2 \frac{\mathbf{R}}{R^2}$ . Эта сила перпендикулярна  $\mathbf{B}$  и в соответствии с уравнениями (2.30) и (2.16) заставляет центр ларморовской окружности дрейфовать со скоростью

$$\mathbf{v}_R = \frac{2c\omega_{\parallel}}{e} \frac{[\mathbf{R}\mathbf{B}]}{R^2 B^2} = \frac{2c\omega_{\parallel}}{eB^2} [\mathbf{B}; (\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{B}_0]. \quad (2.50)$$

Этот дрейф приводит даже в нейтральной плазме к появлению электрического тока, равного

$$\mathbf{j}_R = \frac{Ne}{c} \mathbf{v}_R. \quad (2.51)$$



Поскольку скорость дрейфа  $v_R$  перпендикулярна  $\mathbf{B}$  и радиусу кривизны силовых линий магнитного поля, траектория, описываемая ларморовской окружностью, имеет тот же самый радиус кривизны. Поэтому способ определения  $v_R$  является последовательным.

**В. Влияние градиента  $B$  в направлении, перпендикулярном  $\mathbf{B}$ .** Рассмотрим теперь влияние членов  $\frac{\partial B_z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial B_z}{\partial y}$ ,

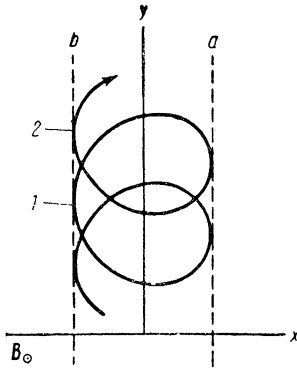


Рис. 2.8. Влияние градиента  $B$ , направленного перпендикулярно к  $\mathbf{B}$ .

которые совпадают соответственно с  $\frac{\partial B}{\partial x}$  и  $\frac{\partial B}{\partial y}$ . Если, например,  $\frac{\partial B}{\partial x} > 0$ , то это означает (рис. 2.8), что на линии  $a$  магнитное поле больше, чем на линии  $b$ . Тогда траектория положительно заряженной частицы будет иметь вид, изображенный на этом рисунке. Поскольку радиус кривизны траектории вблизи прямой  $a$  меньше, чем вблизи прямой  $b$ , частица будет испытывать дрейф в направлении оси  $y$ .

Скорость этого дрейфа можно вычислить следующим образом.

Рассмотрим один цикл движения частицы по ее траектории, скажем, между точками 1 и 2 на рис. 2.8. Из соображений симметрии ясно, что верхний и нижний участки этого отрезка траектории являются зеркальными отображениями друг друга, и в силу этого частица не приобретает суммарной скорости в направлении  $x$ . Поэтому можно написать:

$$\int_{t_1}^{t_2} F_x dt = 0,$$

где  $t_1$  и  $t_2$  — времена прохождения частицей точек 1 и 2, а  $F_x$  —  $x$ -я компонента силы Лоренца, равная

$$F_x = \frac{e}{c} v_y B(x).$$

Разложим теперь  $B$  в ряд по  $x$ :

$$B(x) = B(0) + x \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Тогда

$$\int_{t_1}^{t_2} B v_y dt + \int_{t_1}^{t_2} x \frac{\partial B}{\partial x} v_y dt = 0$$

или

$$\delta y \equiv \int_{t_1}^{t_2} v_y dt = - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \int_{t_1}^{t_2} x dy. \quad (2.52)$$

Величина  $\delta y$  — смещение траектории вдоль оси  $y$  за один цикл. Стоящая справа в уравнении (2.52) величина  $\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x}$  предполагается имеющей первый порядок малости. Следовательно, с точностью до первого порядка малости можно вычислять интеграл  $\int x dy$ , как если бы траектория была круговой. Но тогда  $\int x dy$  есть просто площадь окружности, взятая со знаком минус, так что

$$\delta y = \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \pi a^2 = \left( \frac{2\pi mc}{eB} \right) \frac{c}{2} \frac{mv_{\perp}^2}{eB^2} \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Поскольку  $\frac{2\pi mc}{eB}$  есть с точностью до первого порядка период прохождения частицей одного цикла, можно найти

$$\frac{\delta y}{\delta t} = \left( \frac{c\omega_{\perp}}{eB^2} \right) \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Направление дрейфа параллельно  $[\mathbf{B}_0 \nabla B]$ . В общем случае скорость дрейфа  $\mathbf{v}_G$ , возникающего из-за градиента  $B$ , равна

$$\mathbf{v}_G = \left( \frac{c\omega_{\perp}}{eB^2} \right) [\mathbf{B}_0 \nabla B]. \quad (2.53)$$

Этот дрейф в точности совпадает с дрейфом, возникающим при действии на частицу силы

$$\mathbf{F}_G = - \mu \nabla_{\perp} B, \quad (2.54)$$

что совершенно естественно.

Дрейф со скоростью  $\mathbf{v}_G$  даже в нейтральной плазме приводит к появлению тока

$$\mathbf{j}_G = \frac{Ne}{c} \mathbf{v}_G. \quad (2.55)$$

Г. **Влияние шира.** Если у тензора  $\nabla \mathbf{B}$  последние две компоненты  $\frac{\partial B_x}{\partial y}$  и  $\frac{\partial B_y}{\partial x}$  не обращаются в нуль, то образуется изгиб (или шир) магнитных силовых линий (скручивание их относительно осевой силовой линии и взаимное пересечение). Такая конфигурация соответствует наличию у  $\mathbf{B}$  компоненты, касательной к ларморовской траектории частицы, которая в сочетании с наличием продольной скорости  $v_{\parallel}$  приводит к появлению направленной по радиусу силы. Эта сила несколько изменяет значение ларморовского радиуса частицы или вызывает отклонение вида траектории от круговой, но в первом приближении не вызывает дрейфа частиц.

### § 2.10. Порядок величины скоростей дрейфа

Скорость дрейфа в перекрещивающихся полях зависит только от отношения  $E$  и  $B$ . Нет никаких оснований для ограничений величины отношения  $v_E$  к  $v_{\perp}$  и  $v_{\parallel}$ .

Скорость дрейфа при влиянии кривизны линий, грубо, есть

$$v_R \approx \frac{mc v_{\parallel}^2}{eRB}.$$

Предполагая, что  $v_{\parallel}$  и  $v_{\perp}$  примерно равны, найдем отношение

$$\frac{v_R}{v_{\parallel}} \approx \frac{1}{R} \frac{mv_{\perp} c}{eB} = \frac{a}{R}. \quad (2.56)$$

Вывод значения  $v_R$  справедлив, только когда ларморовский радиус мал по сравнению с радиусом кривизны линий  $\mathbf{B}$ .

В частности, с помощью уравнения (2.56) можно показать, что частица, движущаяся внутри тора, как это изображено на рис. 2.9, сместится за один оборот от своей первоначальной линии  $\mathbf{B}$  в результате дрейфа на  $2\pi$  ларморовских радиуса.

Скорость дрейфа при действии градиента приблизительно может быть выражена следующим образом:

$$v_G \approx \frac{mc v_{\perp}^2}{eBL},$$

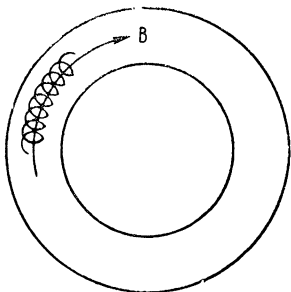


Рис. 2.9. Движение частицы в торе.

где  $L$  — характерное расстояние, на котором  $B$  заметно меняется. Поэтому

$$\frac{v_G}{v_{\perp}} \approx \frac{a}{L}. \quad (2.57)$$

И снова эта величина мала, когда справедлив предложенный вывод.

Для магнитного поля в пустоте ( $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ )  $R$  и  $L$  имеют один и тот же порядок величины.

## § 2.11. Продольный адиабатический инвариант

Рассмотрим снова движение частицы в постоянном магнитном поле. Кинетическая энергия частицы в этом случае есть интеграл движения, а магнитный момент — адиабатический инвариант, т. е. он почти постоянен, когда поля мало изменяются на протяжении ларморовского радиуса. Помимо магнитного момента в этом случае имеется еще один адиабатический инвариант, связанный с движением вдоль магнитных силовых линий.

Рассмотрим свойства этого инварианта на примере движения электронов (или ионов), захваченных магнитным полем Земли.

Магнитное поле Земли можно приближенно представить полем магнитного диполя. Электрон с энергией порядка  $1 \text{ МэВ}$  имеет ларморовский радиус около  $100 \text{ м}$ , т. е. много меньше, чем расстояния, на которых земное поле существенно меняется. Поэтому для таких электронов условия адиабатичности выполняются с запасом.

Рассмотрим электрон, находящийся на силовой линии  $abc$  (рис. 2.10). Во-первых, этот электрон движется вокруг силовой линии по спирали. Когда электрон движется от точки  $b$  к точке  $a$ , на него действует тормозящая сила, введенная в § 2.9, пункт А, так как поле в точке  $a$  больше, чем в точке  $b$ . Предположим, что магнитный момент  $\omega_{\perp}/B$  точно равен  $\omega/B_a$ . Тогда электрон отразится от точки  $a$ ,

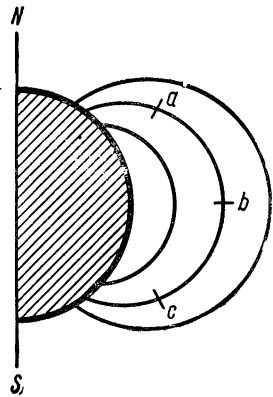


Рис. 2.10. Частица в магнитном поле Земли.

снова минует точку  $b$  и отразится опять в точке  $c$ , где поле имеет то же значение, что и в  $a$ . Таким образом, в первом приближении электрон будет колебаться между точками  $a$  и  $c$  (частота этих колебаний приблизительно равна  $10 \text{ гц}$  для электронов с энергией  $1 \text{ Мэв}$ ).

Однако электрон не останется все время на одной и той же магнитной силовой линии. Дрейфы, связанные с наличием градиентов  $B$  и кривизной, заставят электрон смещаться в восточном направлении (описывая полный оборот вокруг Земли примерно за один час). Если бы поле Земли было в точности полем диполя, то такой дрейф электрона носил чисто азимутальный характер, т. е. электрон после каждого обхода Земли возвращался бы на ту же самую силовую линию  $abc$ . Однако магнитное поле Земли не строго осесимметрично, и поэтому дрейф электрона не чисто азимутального характера. Куда же будет дрейфовать электрон, и возвратится ли он на свою прежнюю силовую линию?

Известно, что кинетическая энергия частицы в магнитном поле постоянна. Поскольку отношение  $\omega_{\perp}/B$  также (приблизительно) постоянно, то на новой силовой линии  $a'b'c'$  (на которой электрон окажется после дрейфа на некоторый азимут) в точках поворота  $a'$  и  $c'$  напряженность магнитного поля имеет такое же значение, как и в точках  $a$  и  $c$  первоначальной линии. Этим, однако, новая линия не определяется, ибо на любой линии напряженность поля имеет значение  $B$  в каких-либо двух точках.

Чтобы продвинуться дальше в наших рассуждениях, используем полученные ранее выражения для скоростей дрейфа, с помощью которых определим движение частицы. Покажем, что для новой линии, на которой оказывается частица, справедливо соотношение

$$\int_{a'}^{c'} v_{\parallel} ds' \approx \int_a^c v_{\parallel} ds \approx \text{const} \quad (2.58)$$

или, иначе, что интеграл от  $v_{\parallel}$  вдоль магнитной силовой линии, взятый между точками поворота, является адиабатическим инвариантом. Значение этого инварианта определяет длину отрезка линии между точками поворота. Поскольку значение в точках поворота нам известно, мы можем определить новую линию на новом азимуте. Очевидно, что в адиабатическом приближении частица после одного полного обхода Земли возвратится на прежнюю линию.

Для доказательства этой теоремы напишем суммарную скорость дрейфов, вызванных кривизной и наличием градиента:

$$\mathbf{v}_{RG} = \frac{2c\omega_{\parallel}}{eB^2} \frac{[\mathbf{R}\mathbf{B}]}{R^2} + \frac{c\omega_{\perp}}{eB^2} [\mathbf{B}_0, \nabla B]. \quad (2.59)$$

Здесь  $\mathbf{R}$  — вектор радиуса кривизны (уравнение 2.49). Рассмотрим теперь элемент длины  $\delta s$  исходной силовой линии и соответствующий элемент  $\delta s'$  новой линии, несколько смещенной относительно исходной (рис. 2.11). Новый элемент линии смещен в направлении  $\mathbf{v}_{RG}$  и ограничивается двумя плоскостями, проведенными нормально через концы исходного элемента  $\delta s$ . Тогда скорость относительного изменения длины этого элемента в системе координат дрейфующей частицы имеет вид

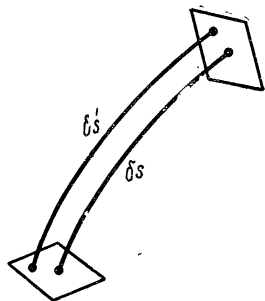


Рис. 2.11. Сопряженные элементы силовой линии.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta s} \frac{d}{dt} \delta s &= \left( \mathbf{v}_{RG} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^2} \right) = \\ &= \frac{c\omega_{\perp}}{eB^2} \left( [\mathbf{B}_0, \nabla B], \frac{\mathbf{R}}{R^2} \right). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Подсчитаем теперь скорость изменения  $v_{\parallel}$  в той же системе. Поскольку

$$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{2}{m} (\omega - \mu B)},$$

где  $\omega$  и  $\mu$  — постоянные, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_{\parallel}} \frac{dv_{\parallel}}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{\omega - \mu B}} \frac{d}{dt} \sqrt{\omega - \mu B} = -\frac{1}{2} \frac{\mu}{(\omega - \mu B)} \frac{dB}{dt} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\mu}{\omega_{\parallel}} (\mathbf{v}_{GR}, \nabla B) = -\frac{1}{2} \frac{\omega_{\perp}}{\omega_{\parallel} B} (\mathbf{v}_{GR}, \nabla B) = \\ &= -\frac{c\omega_{\perp}}{eB^3} \left( \frac{[\mathbf{R}, \mathbf{B}]}{R^2}, \nabla B \right). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Сравнивая уравнения (2.60) и (2.61), можно получить

$$\frac{1}{\delta s} \frac{d\delta s}{dt} + \frac{1}{v_{\parallel}} \frac{dv_{\parallel}}{dt} = \frac{1}{v_{\parallel} \delta s} \frac{d}{dt} (v_{\parallel} \delta s) = 0, \quad (2.62)$$

что означает постоянство величины  $v_{\parallel} \delta s$ . Таким образом, закон адиабатической инвариантности относится не только к интегралу  $\int_a^c v_{\parallel} ds$ , но также и к соответствующим малым элементам линий, рассмотренным выше.

В действительности, однако, не было получено доказательства точной инвариантности величины рассматриваемого интеграла между точками поворота. Точки поворота лежат на поверхности постоянных значений  $B$ , которая может не совпадать с введенной ортогональной к линии поверхностью, ограничивающей элементы линии. Тем не менее, поскольку скорость  $v_{\parallel}$  в точках поворота обращается в нуль, некоторое различие между точками поворота и точками пересечения с введенной поверхностью не сказывается на величине интеграла. Таким образом, можно считать, что

$$\int_a^c v_{\parallel} ds \text{ есть адиабатический инвариант.} \quad (2.63)$$

Когда поле заметно меняется на длине одного ларморовского радиуса, магнитный момент и величина  $v_{\parallel} \delta s$  перестают строго удовлетворять условно адиабатической инвариантности. Превосходное изложение эффектов, связанных с невыполнением адиабатической инвариантности, можно найти в работе Гаррена и др. \*

---

\* A. G a r r e n et al. Proc. 2nd Intern. Conf. Peaceful uses Atomic Energy (Geneva), 31, 65 (1958).

# Г Л А В А 3

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОРБИТ К СТАТИЧЕСКИМ ЗАДАЧАМ

### § 3.1. Введение

В гл. 2 решением уравнений движения частиц в заданных полях был получен ряд выражений для скоростей дрейфов и соответствующих им токов в первом приближении метода орбит. Следующим шагом является подстановка полученных значений токов в уравнения Максвелла для определения соответствующих им полей.

Решим несколько частных статических задач, начав с простейшего случая прямолинейных силовых линий  $\mathbf{B}$  и обобщив решение далее на случай общей статической задачи. На всем протяжении этой главы будем полагать, что плазма нейтральна, а электрическое поле отсутствует.

Для удобства выпишем скорости и токи для различных рассмотренных дрейфов. Вектор  $\mathbf{B}_0$  — единичный вектор, параллельный  $\mathbf{B}$ .

*Скорости дрейфа*

Электрический дрейф

$$\mathbf{v}_E = c \frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}]}{B^2}. \quad (3.1)$$

Поляризационный дрейф

$$\mathbf{v}_D = \frac{mc^2}{eB^2} \dot{\mathbf{E}}. \quad (3.2)$$

Дрейф из-за кривизны линий  $B$

$$\mathbf{v}_R = \frac{2c\omega_{\parallel}}{e} \frac{[\mathbf{R}\mathbf{B}]}{R^2 B^2} = \frac{2c\omega_{\parallel}}{eB^2} [\mathbf{B}, (\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{B}_0]. \quad (3.3)$$



Дрейф при наличии градиента  $B$

$$\mathbf{v}_G = \frac{c\omega_{\perp}}{eB^2} [\mathbf{B}_0, \nabla B]. \quad (3.4)$$

Дрейф при наличии внешней силы

$$\mathbf{v}_F = \frac{c}{e} \frac{[\mathbf{F}, \mathbf{B}]}{B^2}. \quad (3.5)$$

*Токи*

Ток намагничивания

$$\mathbf{j}_m = \text{rot } \mathbf{M}, \quad \mathbf{M} = -\frac{N\omega_{\perp}}{B} \mathbf{B}_0. \quad (3.6)$$

Поляризационный ток

$$\mathbf{j}_p = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}}, \quad \varepsilon - 1 = \frac{4\pi Nmc^2}{B^2}. \quad (3.7)$$

Ток из-за кривизны линий  $B$

$$\mathbf{j}_R = 2N\omega_{\parallel} \left[ \mathbf{R}, \frac{\mathbf{B}}{R^2 B^2} \right]. \quad (3.8)$$

Ток при наличии градиента  $B$

$$\mathbf{j}_G = \frac{N\omega_{\perp}}{B^2} [\mathbf{B}_0, \nabla B]. \quad (3.9)$$

Ток при действии внешней силы

$$\mathbf{j}_F = N \left[ \mathbf{F}, \frac{\mathbf{B}}{B^2} \right]. \quad (3.10)$$

### § 3.2. Случай, когда поле $\mathbf{B}$ не зависит от $z$ , а внешние силы отсутствуют

Пусть поле  $\mathbf{B}$  совпадает по направлению с осью  $z$ . Тогда из уравнения Максвелла (1.3) следует, что  $B$  не зависит от  $z$ . Следовательно, можно предположить, что плотность и энергия частиц также не зависят от  $z$ . Единственными необращающимися в нуль токами в этом случае является ток намагничивания и ток, вызываемый градиентом  $B$ . Поскольку вектор  $\mathbf{B}_0$  постоянен, первый из этих токов равен

$$\mathbf{j}_m = \left[ \mathbf{B}_0, \nabla \frac{N\omega_{\perp}}{B} \right] = \left[ \frac{\mathbf{B}_0}{B}, \nabla N\omega_{\perp} \right] - \frac{N\omega_{\perp}}{B^2} [\mathbf{B}_0, \nabla B]. \quad (3.11)$$

Второй член в этом выражении компенсируется градиентным током (3.9), так что полный ток равен

$$\mathbf{j} = \left[ \frac{\mathbf{B}_0}{B}, \nabla N\omega_{\perp} \right]. \quad (3.12)$$

Четвертое уравнение Максвелла (1.4) в нашем случае приобретает вид

$$[\nabla \mathbf{B}] \nabla = [B\mathbf{B}_0] = -[\mathbf{B}_0 \nabla B] = 4\pi \left[ \frac{\mathbf{B}_0}{B}, \nabla N\omega_{\perp} \right].$$

Поскольку градиенты в последних двух формулах перпендикулярны  $\mathbf{B}_0$ , получаем

$$-\nabla B = \frac{4\pi}{B} \nabla N\omega_{\perp} \quad \text{или} \quad \frac{B^2}{8\pi} + N\omega_{\perp} = \text{const.} \quad (3.13)$$

Остальные уравнения Максвелла удовлетворяются, поскольку было предположено, что  $\rho = E = 0$ .

Заметим, что дивергенция полного тока равна нулю:

$$\text{div } \mathbf{j} = \nabla \mathbf{j} = \frac{\mathbf{B}_0}{B^2} [\nabla B, \nabla N\omega_{\perp}] = 0,$$

так как  $\nabla B$  и  $\nabla N\omega_{\perp}$  коллинеарны, согласно уравнению (3.13). Следовательно, если в какой-либо момент плотность заряда равна нулю, она равна нулю всегда.

Уравнение (3.13) является единственным условием, накладываемым уравнениями Максвелла и уравнением движения частицы, из которого получено выражение для тока (3.12). Поэтому зависимость  $B^2/8\pi$  и  $N\omega_{\perp}$  от  $x$  и  $y$  может быть произвольной при условии, что сумма этих величин сохраняется постоянной.

В частности, граница между плазмой и магнитным полем может иметь любую форму с единственным ограничением, состоящем в том, чтобы величина  $B$  не менялась слишком сильно на расстоянии одного ларморовского радиуса (в противном случае предположения, сделанные в гл. 2, окажутся нарушенными). Сама проблема переходной области будет подробно разобрана в гл. 5.

Соотношение (3.13) следует также из закона сохранения количества движения для статического случая (1.18), если вектор потока плотности импульса частиц выбран в виде

$$P = \begin{pmatrix} N\omega_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & N\omega_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & 2N\omega_{\parallel} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

В этом тензоре нули и  $2N\omega_{\parallel}$  могут быть заменены любыми другими постоянными. Однако вид тензора  $P$ , как в выражении (3.14), естествен еще и по следующим соображениям. Согласно теории орбит (см. § 2.10), движение в перпендикулярном к линиям  $B$  направлении приближенно круговое, причем скорости дрейфов малы по сравнению с окружной скоростью (за исключением случая присутствия электрического поля, которое мы сейчас не учитываем). Следовательно, в первом приближении  $P_{xx} = P_{yy} = N\omega_{\perp}$ ,  $P_{zz} = 2N\omega_{\parallel}$ , а недиагональные члены равны нулю, как в уравнении (3.14). Интересно отметить, что изложенные рассуждения приводят к уравнению (3.13) непосредственно, без вычисления скоростей дрейфа. Однако рассмотрение дрейфов и соответствующих им токов делают этот результат более понятным. Действительно, градиенты  $B$  и  $N\omega_{\perp}$  вызывают ток, который в свою очередь вызывает появление градиента  $B$ . Вид функции  $N\omega_{\perp}(x, y)$  остается при этом неопределенным.

### § 3.3. Искривленные линии поля $B$ в отсутствие внешних сил

Рассмотрим случай, отличающийся от предшествующего только тем, что силовые линии  $B$  являются окружностями, концентрично расположенными относительно оси  $z$ . Будем предполагать, что напряженность поля  $B$ , плотность частиц и их энергия являются функциями только от одной цилиндрической координаты  $r$ . Тогда все токи будут направлены параллельно оси  $z$ . Если  $z$ ,  $r$  и  $\theta$  — цилиндрические координаты, причем такие, что их направления образуют правовинтовую систему, а вектор  $B$  направлен в сторону увеличения  $\theta$ , то возникающие в плазме токи имеют вид

$$\left. \begin{aligned} j_m &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{N\omega_{\perp}}{B}, \\ j_G &= -\frac{N\omega_{\perp}}{B^2} \frac{\partial B}{\partial r}, \\ j_R &= \frac{2N\omega_{\parallel}}{rB}. \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Опять ток  $j_G$  компенсирует часть тока  $j_m$ , и полный ток равен

$$j = -\frac{1}{rB} \frac{\partial}{\partial r} rN\omega_{\perp} + \frac{2N\omega_{\parallel}}{rB}. \quad (3.16)$$

С учетом этого выражения четвертое уравнение Максвелла (1.4)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB) = 4\pi j \quad (3.17)$$

может быть написано в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left( \frac{B^2}{8\pi} + N\omega_{\perp} \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{B^2}{8\pi} - 2N\omega_{\parallel} \right) = 0. \quad (3.18)$$

Это уравнение аналогично уравнению (3.13) для плоского случая. Так же как и ранее, это уравнение является единственным условием, накладываемым уравнением Максвелла и уравнением движения. В частности, величины  $N$ ,  $\omega_{\perp}$ ,  $\omega_{\parallel}$  могут быть выбраны произвольно, а значение  $B$  определено из уравнения (3.18).

Уравнение (3.18) может и в этом случае быть получено непосредственно из уравнения сохранения количества движения (1.28), если использовать для тензора натяжений выражение (1.32), а тензор плотности потока импульса частиц выбрать в виде

$$P = \begin{pmatrix} N\omega_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & 2N\omega_{\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & N\omega_{\perp} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Такой вид этого тензора, так же как и в предшествовавшем случае, оправдан.

При преобразовании уравнения (1.28) удобно воспользоваться выражением (1.39) для дивергенции тензора в цилиндрических координатах.

Рассмотренный случай представляет простейший пример статического пинча. Пинчем называется цилиндрическая плазменная конфигурация, ограниченная направленным по координатным линиям  $\theta$  магнитным полем, которое создается токами в самой плазме. Как было показано, токи в свою очередь обусловлены магнитным полем и его неоднородностью, поэтому полная физическая система поля и плазмы является самосогласованной. Для поддержания токов, по крайней мере пока не учитываются столкновения, нет необходимости в электрических полях. Зависимость плотности плазмы от радиуса произвольная, лишь бы она согласовывалась с магнитным полем в соответствии с уравнением (3.18).

Если учитывать столкновения, то плазма стремится диффундировать в область, занимаемую магнитным полем, а поле в свою очередь проникает внутрь плазмы. Эта диффузия, однако, может быть скомпенсирована электрическим дрейфом, если приложить параллельно оси пинча электрическое поле.

### § 3.4. Общая статическая задача в отсутствие внешних сил

Результаты двух предыдущих параграфов наводят на мысль, что после подстановки трех токов  $\mathbf{j}_m$ ,  $\mathbf{j}_G$  и  $\mathbf{j}_R$  в уравнения Максвелла и при выборе тензора плотности потока импульса частиц в виде

$$P = \begin{pmatrix} N\omega_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & N\omega_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & 2N\omega_{\parallel} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} P_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & P_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & P_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

всегда можно получить закон сохранения количества движения.

Если записать выражение для упомянутых трех токов, не налагая никаких ограничений на поле  $\mathbf{B}$ , и воспользоваться обозначениями  $P_{\perp}$  и  $P_{\parallel}$ , то получим

$$\mathbf{j}_m = - \left[ \nabla, \frac{P_{\perp} \mathbf{B}_0}{B} \right] = P_{\perp} \left[ \mathbf{B}_0, \nabla \frac{1}{B} \right] - \frac{1}{B} [\nabla, P_{\perp} \mathbf{B}_0],$$

$$\mathbf{j}_G = \frac{P_{\perp}}{B^2} [\mathbf{B}_0, \nabla B] = -P_{\perp} \left[ \mathbf{B}_0, \nabla \frac{1}{B} \right],$$

$$\mathbf{j}_R = \frac{P_{\parallel}}{B} [\mathbf{B}_0, (\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{B}_0].$$

Снова токи  $\mathbf{j}_m$  и  $\mathbf{j}_G$  частично компенсируются и сумма всех трех токов окажется равной

$$\mathbf{j}_{mGR} = \frac{[\mathbf{B}_0, \nabla P_{\perp}]}{B} - \frac{P_{\perp}}{B} [\nabla, \mathbf{B}_0] + \frac{P_{\parallel}}{B} [\mathbf{B}_0, (\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{B}_0]. \quad (3.21)$$

Этот ток следует подставить в уравнение Максвелла

$$\frac{1}{4\pi} [\nabla \mathbf{B}] = \mathbf{j}. \quad (3.22)$$

Первый и третий члены в уравнении (3.21), очевидно, перпендикулярны  $\mathbf{B}$ . Член же, пропорциональный  $[\nabla \mathbf{B}_0]$ , может иметь слагающую параллельную  $\mathbf{B}$ . Но при этом не обязательно условие, что полный ток в направлении  $\mathbf{B}$  содержится в этом члене.

Согласно методу орбит, к сумме этих трех токов можно добавить любой параллельный полю ток путем подходящего выбора распределения скоростей  $v_{\parallel}$  центров ларморовских окружностей частиц.

Таким образом, параллельная составляющая тока не полностью определяется уравнением (3.21). Однако в уравнение сохранения количества движения входит только нормальная к полю компонента тока, поскольку сила Лоренца есть  $[\mathbf{j}\mathbf{B}]$ . К компоненте  $\mathbf{j}_{\parallel}$  возвратимся позднее. Пока сосредоточим свое внимание на нормальной полю части полного тока  $\mathbf{j}_{mGR}$ . Поскольку нормальная вектору  $\mathbf{B}_0$  компонента любого вектора  $\mathbf{A}$  есть

$$\mathbf{A}_{\perp} = -[\mathbf{B}_0 [\mathbf{B}_0 \mathbf{A}]], \quad (3.23)$$

то нормальная компонента вектора  $[\nabla \mathbf{B}_0]$  равна

$$\begin{aligned} [\nabla \mathbf{B}_0]_{\perp} &= -[\mathbf{B}_0 [\mathbf{B}_0 [\nabla \mathbf{B}_0]]] = \\ &= -\left[ \mathbf{B}_0, \left( \nabla \frac{B_0^2}{2} - (\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{B}_0 \right) \right] = [\mathbf{B}_0, (\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{B}_0]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

В силу этого нормальная компонента тока  $\mathbf{j}_{mGR}$  равна

$$\mathbf{j}_{\perp} = \frac{[\mathbf{B}_0, \nabla P_{\perp}]}{B} + \frac{(P_{\parallel} - P_{\perp})}{B} [\mathbf{B}_0, (\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{B}_0]. \quad (3.25)$$

Умножая уравнение (3.22) векторно на  $\mathbf{B}$  и подставляя  $\mathbf{j}_{\perp}$ , находим

$$\frac{1}{4\pi} [\mathbf{B} [\nabla \mathbf{B}]] = -\nabla_{\perp} P_{\perp} - (P_{\parallel} - P_{\perp}) (\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{B}_0, \quad (3.26)$$

где  $\nabla_{\perp}$  — поперечная составляющая оператора градиента.

В соответствии с результатами параграфа 1.3 левая часть последнего уравнения представляет дивергенцию тензора натяжения магнитного поля. Следовательно, если это уравнение выражает сохранение импульса в рассматриваемой статической задаче, его правая часть должна равняться взятой со знаком минус дивергенции тензора плотности потока импульса частиц.

Вид тензора  $P$  в декартовой системе, одна из осей которой параллельна  $\mathbf{B}$  в рассматриваемой точке, дается уравнением (3.20). Так как направления осей такой системы координат меняются от точки к точке, при вычислении тензора  $P$  это должно приниматься во внимание. С этой целью разобьем тензор  $P$ , написанный в системе координат, касательной к линии  $\mathbf{B}$  в данной точке, на части следующим образом:

$$P = P_{\perp} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (P_{\parallel} - P_{\perp}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Первый член справа пропорционален единичному тензору — символу Кронекера, который не меняется при поворотах осей и имеет одинаковый вид в любой декартовой системе координат.

Второй тензор в местной касательной системе координат равен диаде  $\mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0$ . Поскольку диада  $\mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0$  — тензор, то второй тензор должен быть равен  $\mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0$  в любой системе координат. Таким образом, в любой декартовой системе координат

$$P = P_{\perp} I + (P_{\parallel} - P_{\perp}) \mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0, \quad (3.28)$$

где  $I$  — единичный тензор (символ Кронекера)

$$I_{ij} \equiv \delta_{ij}. \quad (3.29)$$

Теперь можно просто вычислить дивергенцию  $P$ :

$$\begin{aligned} \nabla P &= \nabla P_{\perp} + (P_{\parallel} - P_{\perp}) (\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{B}_0 + \\ &+ (P_{\parallel} - P_{\perp}) \mathbf{B}_0 (\nabla \mathbf{B}_0) + \mathbf{B}_0 (\mathbf{B}_0 \nabla) (P_{\parallel} - P_{\perp}). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Сравним это выражение с правой частью уравнения (3.26). Для этого заметим, что продольная составляющая оператора векторного дифференцирования имеет вид

$$\nabla_{\parallel} = \mathbf{B}_0 (\mathbf{B}_0 \nabla) \quad (3.31)$$

и что

$$\nabla = \nabla_{\perp} + \nabla_{\parallel}. \quad (3.32)$$

С помощью этих тождеств можно разбить вектор  $\nabla P$  на продольную и поперечную составляющие. Из уравнения (3.30)

$$(\nabla P)_{\perp} = \nabla_{\perp} P_{\perp} + (P_{\parallel} - P_{\perp}) (\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{B}_0, \quad (3.30')$$

$$(\nabla P)_{\parallel} = \nabla_{\parallel} P_{\parallel} + (P_{\parallel} - P_{\perp}) \mathbf{B}_0 (\nabla \mathbf{B}_0). \quad (3.30'')$$

Теперь видно, что правая часть уравнения (3.26) есть  $(\nabla P)_\perp$  со знаком минус. Поэтому уравнение (3.26) может быть записано в виде

$$(\nabla P)_\perp + \frac{1}{4\pi} [\mathbf{B} [\nabla \mathbf{B}]] = 0. \quad (3.33)$$

Таким образом, получили поперечную составляющую уравнения сохранения импульса. Для завершения доказательства закона сохранения полного импульса необходимо еще показать, что продольная составляющая  $\nabla P$  обращается в нуль, т. е.

$$\nabla_{\parallel} P_{\parallel} + (P_{\parallel} - P_{\perp}) \mathbf{B}_0 (\nabla \mathbf{B}_0) = 0. \quad (3.34)$$

В следующем параграфе покажем, что это действительно следует из метода орбит для движения частиц вдоль линий  $\mathbf{B}$ . Сейчас же для будущего использования отметим, что выражение  $(\nabla \mathbf{B}_0)$ , фигурирующее в уравнении (3.34), может быть представлено в виде

$$(\nabla \mathbf{B}_0) = \left( \frac{\nabla \mathbf{B}}{B} \right) = \left( \mathbf{B} \nabla \frac{1}{B} \right), \quad (3.35)$$

поскольку  $(\nabla \mathbf{B}) = 0$ . С помощью этого тождества уравнение (3.34) можно переписать в виде

$$B \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{P_{\parallel}}{B} \right) + \frac{P_{\perp}}{B} \frac{\partial B}{\partial s} = 0, \quad (3.34')$$

где  $s$  — расстояние вдоль силовой линии  $\mathbf{B}$ .

### § 3.5. Движение вдоль силовых линий

В § 2.9, пункт А, было рассмотрено движение одиночной частицы вдоль силовых линий  $\mathbf{B}$ . Применим эти результаты к изучению коллективного движения частиц.

В соответствии с теорией § 2.9, пункт А, частица, движущаяся вдоль линий  $\mathbf{B}$ , ведет себя так, как будто ее потенциальная энергия  $V_{\parallel}$  равна

$$V_{\parallel} = \mu B, \quad (3.36)$$

где  $\mu$  — магнитный момент, равный

$$\mu = \frac{w_{\perp}}{B} \quad (3.37)$$



и являющийся (приближенно) интегралом движения. Полная энергия частицы

$$\omega = \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 + \mu B = \text{const.} \quad (3.38)$$

Используя это уравнение, можно описать процесс захвата частицы в область малых значений  $B$ , расположенную вдоль направления линий  $\mathbf{B}$  и ограниченную областями больших значений  $B$ . Например, при конфигурации поля типа двойного зеркала, изображенной на рис. 3.1, все частицы с полной энергией  $\omega <_{\mu} B_{\text{max}}$  могут в адиабатическом

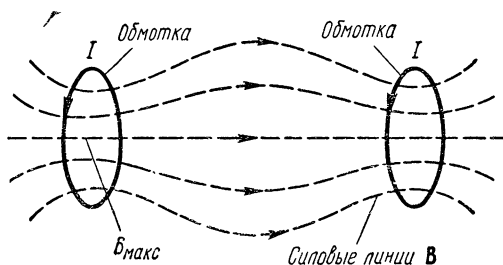


Рис. 3.1. Установка с магнитными зеркалами.

приближении удерживаться в области, расположенной между обмотками. Эти захваченные частицы будут осциллировать вдоль силовых линий в области между зеркалами. Каждая частица, движущаяся вдоль своей линии, в некоторый момент проходит через точку минимального значения  $B$ , расположенную посередине между обмотками, однако различные частицы в соответствии со своими значениями  $\omega$  и  $\mu$  имеют различные точки поворота. Некоторые из них проникают и в области за зеркалами. Если при этом силовые линии оканчиваются на стенках камеры, то такие частицы могут быть быстро потеряны. В других конфигурациях величина  $B$  имеет минимум в нескольких точках, так что будет несколько областей, в которых частицы могут быть захвачены.

Рассмотрим небольшой пучок (трубку) силовых линий  $\mathbf{B}$ , начинающихся от плоскости минимального значения  $B$ . Пусть в области, примыкающей к началу

$$n_m^+(\omega, \mu) d\omega d\mu, \quad (3.39)$$

есть число частиц в кубическом сантиметре, движущихся в положительном направлении вдоль трубки и имеющих энергию между  $\omega$  и  $\omega + d\omega$  и магнитный момент между  $\mu$  и  $\mu + d\mu$ . Соответствующее число частиц, движущихся в обратном направлении, обозначим  $n_m^-$ . Если не все частицы отражаются от областей с большим значением  $B$ , то величины  $n_m^+$  и  $n_m^-$  не обязательно равны друг другу.

Какова будет плотность частиц  $n^+$  в любой другой точке силовой трубки? Поскольку  $\omega$  и  $\mu$  — интегралы движения, величина  $n^+(\omega, \mu)$  остается постоянной. Таким образом, в статическом случае число частиц, имеющих энергию  $\omega$  и магнитный момент  $\mu$  и проходящих через сечение силовой трубки в положительном направлении, не зависит от координаты  $s$  этого сечения, пока частицы могут достигнуть точки  $s$ . Поскольку частицы движутся вдоль силовой трубки со скоростью  $v_{\parallel}$  и площадь поперечного сечения трубки обратно пропорциональна  $B$ , получим, что величина

$$\frac{n^+(\omega, \mu) v_{\parallel}}{B} \text{ постоянна вдоль трубки.} \quad (3.40)$$

В этом уравнении, как и в аналогичном уравнении для  $n^-$ ,  $v_{\parallel}$  выражается через  $\omega$ ,  $\mu$  и  $B$  из уравнения (3.38):

$$v_{\parallel} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(\omega - \mu B)}. \quad (3.41)$$

Учитывая эти выводы, можно рассчитать, как изменяются  $P_{\perp}$  и  $P_{\parallel}$  вдоль силовой трубки. Так, часть  $P_{\parallel}$ , обусловленная частицами с энергией  $\omega$  и магнитным моментом  $\mu$ , движущимися в положительном направлении, согласно уравнению (3.40), равна

$$\begin{aligned} P_{\parallel}^+(\omega, \mu) &= mn^+(\omega, \mu) v_{\parallel}^2 = \\ &= mn_m^+(\omega, \mu) v_{\parallel}(m) \frac{B}{B_m} v_{\parallel}. \end{aligned}$$

Здесь  $v_{\parallel}(m)$  и  $B_m$  — значения  $v_{\parallel}$  и  $B$  в точке минимума  $B$ . Используя далее уравнение (3.41), находим

$$P_{\parallel}^+(\omega, \mu) = 2n_m^+(\omega, \mu) \omega \frac{B}{B_m} \sqrt{\left(1 - \frac{\mu}{\omega} B_m\right) \left(1 - \frac{\mu}{\omega} B\right)}. \quad (3.42)$$

Полное значение  $P_{\parallel}$  будет тогда равно

$$P_{\parallel} = \sum_{+0}^{-\infty} \int d\omega \int_0^{\omega/B} P_{\parallel}^{\pm}(\omega, \mu) d\mu. \quad (3.43)$$

Иногда удобнее ввести вместо магнитного момента  $\mu$  угол  $\theta$  между вектором скорости частицы и вектором  $\mathbf{B}$  в точке минимума  $B$ . Тогда

$$\mu = \frac{\omega}{B_m} \sin^2 \theta. \quad (3.44)$$

Определим новую функцию распределения равенством

$$n_m(\omega, \theta) 2\pi \sin \theta d\theta = n_m^{\pm}(\omega, \mu) d\mu. \quad (3.45)$$

Область изменения угла  $\theta$  от 0 до  $\pi$  охватывает как положительное, так и отрицательное направления движения. Поэтому  $n_m(\omega, \theta)$  — число частиц в единице объема пространства, приходящихся на единицу энергии в единице пространственного угла в точке, где  $B$  минимально. Выражая  $P_{\parallel}$  через переменную  $\theta$ , получим

$$P_{\parallel} = \int_0^{\infty} d\omega \int_{\theta} 2n_m(\omega, \theta) \omega \times \\ \times \frac{B}{B_m} |\cos \theta| \sqrt{1 - \frac{B}{B_m} \sin^2 \theta} 2\pi \sin \theta d\theta. \quad (3.46)$$

Здесь интеграл по  $\theta$  берется в той части интервала  $(0, \pi)$ , для которой подкоренное выражение больше нуля. Записывая аналогично  $P_{\perp}$ , получим

$$P_{\perp} = \int_0^{\infty} d\omega \int_{\theta} n_m(\omega, \theta) \omega \times \\ \times \left(\frac{B}{B_m}\right)^2 \frac{|\cos \theta| \sin^2 \theta}{\sqrt{1 - (B/B_m) \sin^2 \theta}} 2\pi \sin \theta d\theta. \quad (3.47)$$

С помощью соотношений (3.46) и (3.47) можем выразить  $P_{\parallel}$  и  $P_{\perp}$  в любой точке силовой трубки через значение функции  $n_m(\omega, \theta)$  в точке ближайшего минимума  $B$  и через отношение  $B/B_m$ . Расстояние  $s$  вдоль силовой линии входит в это выражение неявно, в виде зависимости  $B = B(s)$ .

Вычислять интеграл для обеих величин  $P_{\parallel}$  и  $P_{\perp}$  не обязательно. Легко заметить, дифференцируя  $P_{\parallel}$  и  $P_{\perp}$  по длине  $s$ , что эти величины связаны. Действительно, деля уравнение (3.46) на  $B$  и дифференцируя, находим

$$B \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{P_{\parallel}}{B} \right) = - \left( \frac{P_{\perp}}{B} \right) \frac{\partial B}{\partial s}.$$

Это равенство доказывает справедливость уравнений (3.34) и (3.34') предыдущего параграфа. Кроме того, если пользоваться уравнениями (3.34') и (3.46), можно не учитывать уравнение (3.47). Будем просто считать, что  $P_{\perp}$  определяется уравнением (3.34'), а из уравнения (3.46) получаем  $P_{\parallel}$ .

Изменение  $P_{\parallel}$  и  $P_{\perp}$  вдоль силовой трубки определяется функцией распределения, проинтегрированной по энергии

$$P_m(\theta) = \int_0^{\infty} \omega n(\omega, \theta) d\omega. \quad (3.48)$$

В том случае, когда  $P_m(\theta)$  не зависит от  $\theta$ , из уравнений (3.46) и (3.47) получаем, что  $P_{\parallel}$  и  $P_{\perp}$  равны друг другу и постоянны по всей длине трубки:

$$P_{\parallel} = P_{\perp}, \quad \frac{\partial P_{\parallel}}{\partial s} = \frac{\partial P_{\perp}}{\partial s} = 0. \quad (3.49)$$

В одном частном случае этот результат является следствием сохранения энергии и теоремы Лиувилля. Именно, если не только  $P_m(\theta)$ , но и  $n_m(\omega, \theta)$  не зависит от  $\theta$ , уравнение (3.49) может быть получено из этой теоремы. Действительно, тогда в точке минимума  $B$  распределение скоростей сферически симметрично. Частицы с некоторой энергией занимают шаровой слой в пространстве скоростей, как это изображено на рис. 3.2, а. Проследим за этими частицами вплоть до достижения ими сечения трубки, где  $B = B_1 > B_m$ . Некоторые из частиц испытывают отражение еще до достижения этого сечения. Предположим, что  $B_1/B_m$  имеет такое значение, что частицы из экваториальной области шарового слоя  $ss$  (см. рис. 3.2, а) испытают отражение. Частицы с энергией, лежащей на границе области  $ss$  при  $B = B_m$ , как раз испытывают отражение в точках  $B = B_m$ , и поэтому там  $v_{\parallel} = 0$ . При перемещении от точек  $B_m$  к точкам  $B_1$  угол между  $\mathbf{B}$  и скоростью частиц, лежащих вне области  $ss$ , увеличивается. Согласно теореме Лиувилля, плотность

частиц в фазовом пространстве вокруг каждой из этих частиц не меняется при их перемещении из точки  $B = B_1$  в точку  $B = B_m$ . Поэтому распределение скоростей в точке  $B_1$  будет изотропным, если оно было таким в точке  $B_m$ . Далее, поскольку энергия и плотность частиц в фазовом пространстве не меняется, значения  $P_{\parallel}$  и  $P_{\perp}$  также остаются неизменными. Объем, занимаемый в пространстве скоростей некоторой группой частиц, увеличивается при их перемещении от точки  $B_m$  к  $B_1$ , тогда как объем в коор-

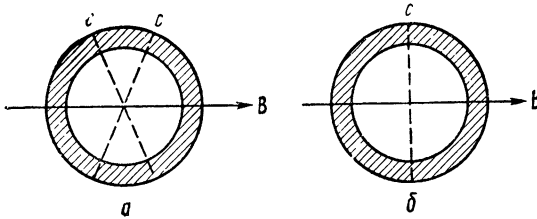


Рис. 3.2. Распределение частиц в пространстве скоростей.

динатном пространстве, наоборот, уменьшается, так как в области больших значений  $B$  силовые линии располагаются теснее.

Эти рассуждения позволяют понять, почему за начальную точку выбрали минимальное значение  $B$ . Если начать рассмотрение с точки, где  $B = B_1$ , то из предположения об изотропности распределения скоростей в этой точке нельзя сделать вывод об его изотропности в точке  $B = B_m$ . Действительно, нельзя сделать никаких заключений о распределении скоростей в области  $cc$  при значении  $B_m$ , исходя из распределения при  $B_1$ , так как ничего не известно о частицах, испытавших отражение в точках между  $B_1$  и  $B_m$ .

В конфигурации поля типа магнитных зеркал (см. рис. 3.1) распределение скоростей не может быть изотропным, поскольку частицы со слишком большим отношением  $v_{\parallel}/v_{\perp}$  будут немедленно уходить сквозь зеркала. Пусть  $B_m$  — максимальное значение  $B$  на протяжении силовой линии. Тогда для частиц, точки поворота которых совпадают с точкой, где  $B = B_m$ , будет справедливо соотношение

$$\omega = \mu B_m. \quad (3.50)$$

Если выразить значение магнитного момента в точке  $B_m$  через угол  $\theta$ , то получим

$$\mu = \frac{\omega_{\perp}}{B} \Big|_{\text{мин}} = \frac{\omega \sin^2 \theta}{B_m}. \quad (3.51)$$

Комбинируя два последних уравнения, найдем, что скорость частиц, отражающихся в точке, где  $B = B_M$ , составляет в точке  $B_m$  с  $B$  угол  $\theta_c$ , такой, что

$$\sin^2 \theta_c = \frac{B_m}{B_M}. \quad (3.52)$$

Только частицы, движущиеся под углами в диапазоне от  $\theta_c$  до  $\theta_c - \pi$ , будут отражаться от зеркала. Для данного случая можно выбрать в качестве одного из возможных следующее выражение для  $P_m(\theta)$ :

$$\left. \begin{aligned} P_m(\theta) &= A(\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_c) && \text{для } \sin \theta > \sin \theta_c; \\ P_m(\theta) &= 0 && \text{для } \sin \theta < \sin \theta_c, \end{aligned} \right\} \quad (3.53)$$

где  $A$  — постоянная. (Конечно, любая функция, исчезающая при  $\sin \theta < \sin \theta_c$ , равно допустима). Для выбранного распределения можно получить с помощью уравнений (3.48) и (3.49):

$$\left. \begin{aligned} P_{\parallel} &= \frac{16\pi}{15} A \frac{B_m}{B} \left(1 - \frac{B}{B_M}\right)^{5/2}; \\ P_{\perp} &= \frac{16\pi}{15} A \frac{B_m}{B} \left(1 - \frac{B}{B_M}\right)^{3/2} \left(2 + \frac{1}{2} \frac{B}{B_M}\right). \end{aligned} \right\} \quad (3.54)$$

Как  $P_{\parallel}$ , так и  $P_{\perp}$  обращаются в нуль при  $B = B_M$  и имеют максимум при  $B = B_m$ .

### § 3.6. Система уравнений для общей статической задачи

Попытаемся теперь записать полную систему уравнений для общей статической задачи. Под полной системой подразумеваем такую, совместное решение которой является возможным статическим решением, не нуждающимся в каких-либо дополнительных оговорках.

Имеет смысл напомнить, с чего мы начали наше рассмотрение. Поскольку электрическое поле предполагается равным нулю, уравнения Максвелла сводятся к двум:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (3.55)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j}. \quad (3.56)$$

Если плотность токов  $\mathbf{j}$  известна, то эти уравнения однозначно определяют поле  $\mathbf{B}$  при условии (повсеместном в физических задачах), что на бесконечности нет источников поля. Плотность токов  $\mathbf{j}$  распадается на две части: во-первых, токи во внешних обмотках, которые можно считать заданными, и, во-вторых, токи в самой плазме, которые нужно определить.

Исходным пунктом при изучении плазмы явилось исследование уравнений движения отдельной частицы. Чтобы как-либо продвинуться в изучении проблемы многих тел, предположим, что частицы взаимодействуют только через усредненные поля, в данном случае через их среднее магнитное поле. В этом приближении на каждую частицу в некоторой точке действует одно и то же непрерывное, закономерно изменяющееся магнитное поле, являющееся функцией точки. Движение частиц в таком поле затем рассчитывалось приближенно до членов первого порядка по отношению ларморовского радиуса  $a$  к характерной длине изменения магнитного поля. На основе этого расчета была вычислена плотность тока, которая оказывалась пропорциональной градиентам  $\mathbf{B}$  и градиентам плотности энергии частиц. После подстановки этих значений плотности тока в уравнение Максвелла (3.56) нашли, что выведенное уравнение совпадает с поперечной частью уравнения, выражающего сохранение импульса:

$$\nabla(T + P) = 0, \quad (3.57)$$

где  $T$  — тензор натяжений магнитного поля, а  $P$  — тензор плотности потока импульса частиц.

Следует особо отметить два момента в наших рассуждениях. Во-первых, можно было заранее ожидать, что мы придем к уравнению сохранения импульса, поскольку еще в первой главе было видно, что оно является следствием уравнений Максвелла и усредненных уравнений движения. Во-вторых, тензор плотности потока импульса следует вычислять с точностью до нулевого порядка по степеням

градиентов, так как градиенты, появляющиеся в выражениях для токов, уже присутствуют в уравнении (3.57) в виде дивергенции тензоров.

Это означает, что в данном приближении при вычислении  $P$  учитываются только ларморовская и продольная составляющие энергии частиц, как это видно из уравнения (3.20), но не дрейфы.

При внимательном анализе мы могли бы, заметив с самого начала, что уравнение (3.57) — закон сохранения импульса в первом приближении, вывести из него, идя обратным путем, выражения для токов в том же приближении. Однако метод, использованный нами, дает более ясное представление о характере поведения плазмы. При рассмотрении бесстолкновительной плазмы всегда полезно знать поведение отдельных частиц.

В итоге было обнаружено, что теория, учитывающая градиенты до первой степени, приводит к двум уравнениям— (3.46) и (3.47), описывающим изменение  $P_{\parallel}$  и  $P_{\perp}$  вдоль силовых линий  $\mathbf{B}$ . Одна комбинация этих двух уравнений соответствует второй (продольной) части уравнения (3.57). Однако такой вариант не исчерпывает всей информации, содержащейся в уравнениях (3.46) и (3.47). Таким образом, уравнение (3.57) недостаточно само по себе. Как отмечено в § 1.8, в проблеме многих тел усредненный закон сохранения импульса не содержит всех сведений. Поэтому вместо уравнения (3.57) необходимо добавить к основным уравнениям три следующих

$$\mathbf{j}_{\perp} = \left[ \frac{\mathbf{B}_0}{B}, \{ \nabla P_{\perp} + (P_{\parallel} - P_{\perp})(\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{B}_0 \} \right]; \quad (3.58)$$

$$P_{\perp} = -B^2 \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{P_{\parallel}}{B} \right) \bigg/ \frac{\partial B}{\partial s}; \quad (3.59)$$

$$P_{\parallel} = 2 \int_0^{\pi} P_m(\theta) \frac{B}{B_m} |\cos \theta| \sqrt{1 - \frac{B}{B_m} \sin^2 \theta} 2\pi \sin \theta d\theta, \quad (3.60)$$

являющихся слегка видоизмененными вариантами уравнений (3.25), (3.34') и (3.46). При этом необходимо еще учесть определение  $P_m(\theta)$ , т. е. уравнение (3.48).

Все эти уравнения выведены из уравнений движения частиц. Первые два из них в сочетании с уравнением (3.56) эквивалентны уравнению (3.57), так что последнее может не учитываться.



Теперь мы располагаем достаточно полной системой уравнений. Уравнения (3.55) и (3.56) определяют вектор  $\mathbf{V}$ , а уравнения (3.58)—(3.60) —  $j$ ,  $P_{\perp}$  и  $P_{\parallel}$ . Из других величин в уравнениях присутствуют только  $j_{\parallel}$  и  $P_m(\theta)$ . Рассмотрим, как определяются эти величины.

Сначала обратимся к продольному току. Важно отметить, что в то время как  $j_{\perp}$  является величиной первого порядка по степеням градиентов (а, следовательно, по  $a/L$ ),  $j_{\parallel}$  может быть величиной нулевого порядка. Величина  $j_{\parallel}$  может достигать значений

$$j_{\parallel} \approx \frac{Nev}{c}, \quad (3.61)$$

где  $v$ , как обычно, — средняя скорость частиц.

Как уже было показано в § 2.10, скорости магнитных дрейфов имеют порядок  $\frac{a}{L}v$ , и поэтому дрейфовые токи меньше  $j_{\parallel}$  в  $a/L$  раз.

Выражение (3.61), определяющее столь большую величину  $j_{\parallel}$ , получается в том случае, когда распределение  $P_m(\theta)$  сильно несимметрично относительно  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , т. е. когда количество частиц, движущихся вдоль силовой линии  $\mathbf{V}$  в одном направлении, значительно больше, чем в обратном. В этом случае из требования сохранения заряда (для статического случая) вытекает, что ток в различных точках одной и той же силовой трубки должен быть постоянным, т. е. с точностью до нулевого порядка по градиентам

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{j_{\parallel}}{B} \right) = 0. \quad (3.62)$$

Сомножитель  $1/B$  введен в это уравнение, чтобы учесть зависимость площади поперечного сечения силовой трубки от напряженности магнитного поля вдоль нее.

Уравнение (3.62) определяет  $j_{\parallel}$  в том случае, когда  $j_{\parallel}$  имеет нулевой порядок малости по  $a/L$ . Если силовые линии  $\mathbf{V}$  пронизывают рассматриваемый объем, можно произвольно определять токи, втекающие в этот объем (или вытекающие из него). Если же силовые линии замыкаются внутри рассматриваемого объема, то можно произвольно задать значение  $j_{\parallel}$  в одной точке на каждой линии  $\mathbf{V}$ .

Конфигурации, в которых  $j_{\perp}$  равно нулю или очень мало по сравнению с  $j_{\parallel}$ , иногда называют бессиловыми конфигурациями, поскольку в них магнитное поле слабо или совсем не оказывает пондермоторного действия на плазму, и наоборот. Подобные конфигурации характеризуются наличием изгибов и шира у силовых линий — свойство полей, для которых ротор  $\mathbf{V}$  (т. е. ток) параллелен самому полю  $\mathbf{V}$ . Несколько простых примеров бессиловых конфигураций рассмотрено в § 3.8.

Хотя  $j_{\parallel}$  может быть много больше тока  $j_{\perp}$ , часто оказываются интересными случаи, когда это не так. Если все частицы совершают движение с отражениями, как, например, между магнитными зеркалами, число частиц, движущихся в одном направлении вдоль линий  $\mathbf{V}$ , будет равно (в нулевом приближении по  $a/L$ ) числу движущихся в обратном направлении. Поэтому с точностью до нулевого порядка по  $a/L$ ,  $j_{\parallel}$  можно считать равным нулю. Но уже в следующем приближении  $j_{\parallel}$  будет иметь конечное значение, соизмеримое с  $j_{\perp}$ . С точностью до членов первого порядка по  $a/L$  закон сохранения заряда имеет вид

$$\nabla(\mathbf{j}_{\parallel} + \mathbf{j}_{\perp}) = 0 \quad (3.63)$$

или, вводя расстояние  $s$  вдоль силовой линии  $\mathbf{V}$ :

$$B \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{j_{\parallel}}{B} \right) = -\nabla j_{\perp}. \quad (3.63')$$

Выясним теперь, что означает это уравнение. Вспомнив, что  $\mathbf{j}_{\perp}$  определяется равенством (3.58), можно рассмотреть  $\nabla j_{\perp}$  как правую часть неоднородного уравнения (3.63') для  $j_{\parallel}$ . Дивергенция от  $\mathbf{j}_{\perp}$ , определяемая уравнением (3.58), не обязательно должна равняться нулю. Она обращается в нуль, когда линии  $\mathbf{V}$  прямые и в некоторых случаях высокой симметрии. Поэтому в общем случае  $\mathbf{j}_{\perp}$  может обусловить увеличение заряда в некоторых точках силовой трубки и уменьшение его в других точках этой трубки, причем дополнительный заряд не обязательно должен равняться исчезнувшему. Однако, как будет видно из дальнейшего, только когда суммарный заряд, появляющийся в силовой трубке при действии  $\nabla j_{\perp}$ , обращается в нуль, конфигурация оказывается статической или приближенно статической, в противном случае конфигурация существенно динамическая. В этом можно убедиться на некоторых примерах.

Во-первых, при высокой симметрии конфигурации  $\nabla j_{\perp}$  может обращаться в нуль везде. Этим свойством обладают конфигурации, рассмотренные в § 3.2 и 3.3. Хотя в обоих этих случаях конфигурация не ограничена в пространстве, можно указать примеры и с ограниченной геометрией. Для осесимметричной конфигурации с магнитными зеркалами, изображенной на рис. 3.1, линии тока  $j_{\perp}$  имеют вид окружностей с центром на оси и дивергенция  $j_{\perp}$  равна нулю. Во всех перечисленных примерах мы имеем право выбрать такое распределение плотности частиц, которое обращает везде  $j_{\parallel}$  в нуль. Тогда уравнение (3.63) оказывается выпол-

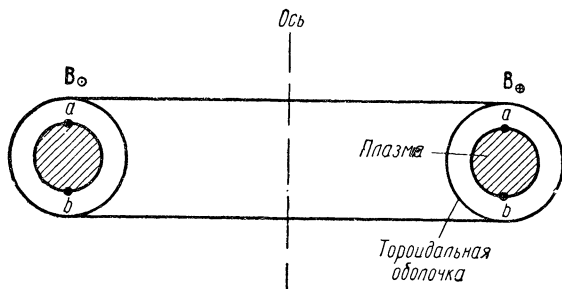


Рис. 3.3. Плазма в торе.

ненным и электрически нейтральной в начальный момент система останется такой всегда. Подобные конфигурации можно назвать строго статическими.

Рассмотрим теперь пример, в котором при действии  $\nabla j_{\perp}$  вдоль силовых линий  $\mathbf{B}$  возникает локальный нескомпенсированный заряд. На рис. 3.3 изображена схема тороидальной обмотки, образующей магнитное поле с силовыми линиями в виде концентричных относительно общей оси окружностей. Внутри обмотки помещается плазма. Дрейфы, обусловленные кривизной линий  $\mathbf{B}$  и неоднородностью градиента  $B$ , заставляют положительные частицы двигаться вверх параллельно оси, а отрицательные — соответственно вниз. Возникающий при этом электрический ток образует на верхних и нижних границах плазменного тора заряды противоположного знака. Положительный заряд — на верхней границе вблизи силовой линии  $aa$ , а отрицательный — вблизи линии  $bb$ . Хотя эти заряды могут перемещаться вдоль силовых линий, они не могут взаимно уничто-

жаться. В силу этого образуется электрическое поле, направленное вниз, примерно параллельно оси. В сочетании с перпендикулярным ему магнитным полем оно заставляет всю плазму двигаться в направлении от оси. В гл. 4 будет показано, что скорость этого движения практически равняется тепловой скорости частиц. Действительно, плазма движется во внешнюю сторону так, как будто бы магнитное поле не препятствует действию центробежной силы. Поэтому такую плазменную конфигурацию правильнее считать динамической, а не статической.

Характерной особенностью в этом примере является то, что заряд, возникающий на некоторых силовых линиях, не может исчезнуть вследствие растекания вдоль этих силовых линий. Образующееся при этом электрическое поле совместно с присутствующим магнитным определяет динамический характер такой конфигурации.

Путем незначительного видоизменения описанной конфигурации (см. рис. 3.3) можно создать такую, которую будем считать приближенно равновесной. Все видоизменения сводятся к тому, чтобы сделать магнитные силовые линии изогнутыми по спирали вокруг осевой линии тора. Этого можно достичь созданием в плазме дополнительного суммарного тока, текущего вдоль тора, или добавлением внешней винтовой обмотки с малым числом витков и большим шагом. В этом случае каждая магнитная силовая линия будет частично проходить по верхней части тора, частично по нижней. Образующиеся заряды смогут тогда, распространяясь вдоль такой линии, компенсировать друг друга.

Однако для того, чтобы заставить заряды перемещаться вдоль силовых линий, требуется приложить некоторое электрическое поле. Даже если пренебречь столкновениями (т. е. сопротивлением), зарядам остается преодолеть некоторые небольшие силы, связанные с наличием магнитных зеркал, которые образуются из-за непостоянства величины  $B$  вдоль силовой линии.

Потенциальная энергия электрического поля, которое нужно приложить для преодоления частицей зеркального барьера, по порядку величины равна

$$eEL \approx \mu \delta B = \frac{\omega_{\perp}}{B} \delta B, \quad (3.64)$$

где  $L$  — расстояние, на котором действует электрическое поле, а  $\delta B$  — изменение  $B$ .

Электрическое поле в общем случае может иметь компоненту, перпендикулярную  $\mathbf{B}$ , которая вызовет дрейф плазмы со скоростью

$$V_{\text{дрейф}} \approx \frac{cE}{B} \approx \left( \frac{c\omega_{\perp}}{eLB} \right) \frac{\delta B}{B}. \quad (3.65)$$

Эта скорость имеет такой же порядок величины (или меньше) как скорость магнитных дрейфов, превышающих в  $a/L$  раз тепловую скорость. Если в предыдущем примере плазма двигалась с тепловой скоростью, то в данном случае скорость ее движения в  $a/L$  раз меньше. Поэтому можно сказать, что последняя конфигурация может считаться статической с точностью до первого порядка по  $a/L$ .

Нейтрализующие токи  $\mathbf{j}_{\parallel}$ , текущие вдоль силовых линий, будут, конечно, изменять магнитное поле. Принять во внимание их при самосогласованном расчете поля и распределения плотности в плазме — задача очень сложная. Насколько автору известно, подобные конфигурации рассчитываются только методом теории возмущений. При этом за нулевое приближение берут магнитное поле в пустоте, затем предполагают наличие некоторой небольшой плотности плазмы и рассчитывают токи, вызываемые в ней исходным магнитным полем. Обычно приходят к выводу что полученные токи не слишком сильно возмущают исходное магнитное поле.

В случаях с высокой симметрией, когда  $\nabla \mathbf{j}_{\perp}$  заведомо равно нулю, можно считать, что  $\mathbf{j}_{\parallel} = 0$  или что  $\mathbf{j}_{\parallel}/B$  постоянно вдоль линий  $\mathbf{B}$ . При таких условиях задача самосогласованного расчета поля в плазме уже не столь неразрешима.

### § 3.7. Теорема вириала

Теорему вириала из механики можно легко обобщить на случай присутствия электромагнитного поля. Обратимся вновь к уравнению (3.57), выражающему сохранение импульса в статических случаях. Не пренебрегая индексами, его можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ij} + P_{ij}) = 0 \quad (3.66)$$

(правило суммирования учтено).

Помножим это уравнение скалярно на радиус-вектор  $x_i$  и проинтегрируем его по объему  $V$ , ограниченному поверхностью  $S$ . Затем, интегрируя по частям и используя теорему Гаусса, находим

$$\int_V x_i \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ij} + P_{ij}) dV = \\ = \int_S n_j x_i (T_{ij} + P_{ij}) dS - \int_V (T_{ii} + P_{ii}) dV = 0,$$

где  $n_j$  — единичный вектор нормали к поверхности. След тензора энергии — импульса электромагнитного поля — равен  $T_{ii} = \frac{B^2 + E^2}{8\pi}$ . Поэтому

$$\int_V \left( \frac{B^2 + E^2}{8\pi} + P_{ii} \right) dV = \int_S n_j x_i (T_{ij} + P_{ij}) dS. \quad (3.67)$$

Это и есть теорема вириала. Применим ее к некоторым конкретным случаям.

Вначале покажем, что ни для какой комбинации полей и плазмы без введения дополнительных внешних натяжений не может выполняться баланс натяжений. Предположим, что плазма занимает некоторый ограниченный объем. Тогда для больших расстояний поля должны убывать по крайней мере как  $1/r^2$ , и поверхностный интеграл в уравнении (3.67) обращается на бесконечности в нуль. Поэтому объемный интеграл в этом случае также должен равняться нулю. Поскольку след тензора  $P$  равен удвоенной плотности энергии плазмы и подынтегральное выражение, таким образом, не может быть отрицательным,  $B, E$  и плотность энергии частиц должны быть равны нулю.

Легко видеть, что для того чтобы удержать в равновесии систему из полей и плазмы, необходимо ввести дополнительные отрицательные натяжения, которые скомпенсировали бы положительные натяжения в объемном интеграле. Добавим члены с такими натяжениями, обозначим их через  $S_{ij}$ .

Устремляя опять радиус поверхности к бесконечности, найдем

$$\int_V S_{ii} dV = - [W_{\text{поля}} + 2W_{\text{плазма}}], \quad (3.68)$$

где  $W$  — полная энергия. Из этого уравнения следует, что для того чтобы удержать в равновесии систему полей и плазмы, необходимо некоторое количество вещества, несущего дополнительные натяжения. Рассмотрим натяжение  $S_{ij}$  в некоторой точке пространства. Поскольку  $S_{ij}$  симметричен, в соответствующем образом выбранной системе координат он будет диагональным с тремя неисчезающими членами  $S_{11}$ ,  $S_{22}$  и  $S_{33}$ . Часть этих членов должна быть отрицательной, поскольку след тензора — величина инвариантная. Для создания отрицательного натяжения  $S$  необходимо наличие упругого материала с плотностью в единице объема  $\rho|S|/S_m$ , где  $\rho$  — плотность массы материала, используемого для создания натяжений, а  $S_m$  — предел прочности на разрыв для этого материала. Ясно, что наиболее выгодна ситуация, когда все натяжения растягивающие и

$$\begin{array}{l} \text{масса материала,} \\ \text{несущего упругие} \\ \text{натяжения,} \end{array} \geq \frac{\rho}{S_m} [W_{\text{поля}} + 2W_{\text{плазм}}]. \quad (3.69)$$

Используя значения для типичных высокопрочных материалов, можно найти, что для удержания в равновесии конфигураций с энергией до  $10^3$  Дж необходима масса материала, несущего упругие натяжения, порядка грамма.

Конечно, по другим причинам, например по соображениям теплоотвода, могут потребоваться еще большие массы материала. Выведенная теорема может представить интерес, в частности, при конструировании сверхпроводящих магнитов для космических аппаратов.

У читателя может создаться впечатление, что теорема вириала требует равенства по порядку величины натяжений в материале и максимальных магнитного и плазменного давлений. Однако это не так. В противоположность обычной жидкости, в которой по законам гидравлики давление одинаково во всех точках, магнитное (или электрическое) поле способно превращать малые давления, действующие на большие площади, в большие давления, приложенные к малым площадям.

Рассмотрим в качестве примера коаксиальную конфигурацию, изображенную на рис. 3.4. Поскольку  $B$  изменяется с радиусом как  $1/r$ , отношение давления  $P_i$  на вну-

тренний проводник к давлению  $P_0$  на внешний проводник имеет вид

$$\frac{P_i}{P_0} = \frac{r_0^2}{r_i^2}, \quad (3.70)$$

где  $r_i$  и  $r_0$  — соответственно радиусы внутреннего и внешнего проводников. Таким образом, теоретически оказывается возможным создавать давления, превосходящие по величине максимально допустимые по соображениям прочности реальных материалов. Эта возможность основана на том факте, что натяжения, входящие в тензор натяжений поля, могут быть направлены по вектору поля.

Применим к этому случаю теорему вириала (3.69) и покажем, что необходимая масса внешнего проводника не зависит от его радиуса  $r_0$ . Давление на внешний проводник

$$P_0 \sim \frac{1}{r_0^2}.$$

Это давление должно уравновешиваться натяжением во внешнем проводнике. Полное разрывающее усилие на единицу длины цилиндра  $T$  определяется уравнением

$$P_0 = \frac{T}{r_0},$$

а зависимость  $T$  от  $r_0$  определяется как

$$T \sim \frac{1}{r_0}.$$

Толщина внешнего проводника пропорциональна разрывающему усилию, которое на него действует.

Таким образом, масса внешнего проводника, приходящаяся на единицу длины, не зависит от его радиуса  $r_0$ .

### § 3.8. Бессилловые конфигурации

Если плотность электрического тока  $\mathbf{j}$  параллельна  $\mathbf{B}$ , то магнитное поле не вызывает сил, действующих на ток. Подобные конфигурации называются бессилловыми.

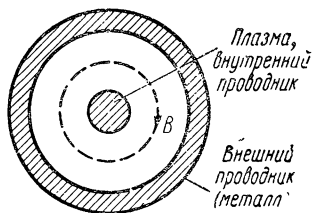


Рис. 3.4. Конфигурация, усиливающая натяжения поля.



Из теоремы вириала следует, что никакая система магнитных полей не может быть полностью бессиловой. Действительно, если  $\mathbf{j}$  везде параллельно  $\mathbf{B}$ , то натяжения в плазме и материалах могут быть сведены к нулю, а тогда из уравнения (3.67) следует, что интеграл по объему от  $B^2$  также обращается в нуль, что может быть только тогда, когда  $\mathbf{B}$  везде равно нулю.

Можно, однако, представить себе конфигурации, которые являются бессиловыми в некоторой области. В качестве достаточно простого примера бессиловой области рассмотрим осесимметричную конфигурацию в цилиндрических координатах  $r$ ,  $\theta$  и  $z$ , образующих правовинтовую систему. Пусть также существующие в такой системе поля  $B_\theta$  и  $B_z$  будут функциями только радиуса  $r$ . Уравнение Максвелла (1.4) можно тогда записать так

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\theta) = 4\pi j_z, \quad (3.71)$$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial r} = 4\pi j_\theta. \quad (3.72)$$

Условие бессиловой конфигурации, состоящее в параллельности векторов  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{B}$ , имеет в наших обозначениях вид

$$j_\theta = j_z \left( \frac{B_\theta}{B_z} \right). \quad (3.73)$$

Интегрируя непосредственно уравнение (3.71), получаем

$$B_\theta = \frac{1}{r} \int 4\pi j_z r dr = \frac{2}{r} I_z(r), \quad (3.74)$$

где  $I_z(r)$  — полный ток в направлении  $z$ , протекающий через сечение радиусом  $r$ . Подставляя уравнение (3.73) в (3.72) и используя равенство (3.71) для исключения  $j_z$ , находим

$$-\frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{B_\theta}{B_z} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\theta). \quad (3.75)$$

Определяя  $B_\theta$  из уравнения (3.74), можно из последнего уравнения найти  $B_z$ . Уравнение (3.75) выражает равновесие магнитных натяжений.

Для дальнейшего определения полей необходимо сделать предположение о виде  $I_z(r)$ . В общем случае силовые линии должны быть винтовыми.

Конкретизируя задачу, можно потребовать, чтобы, например, изгиб винтовых силовых линий был однород-

ным. Пусть каждая силовая линия  $B$  делает полный оборот вокруг оси  $z$  через интервал  $L$ , измеряемый вдоль этой оси. Тогда

$$B_\theta = \alpha r B_z, \quad \alpha \equiv \frac{2\pi}{L}. \quad (3.76)$$

Используя это уравнение для исключения  $B_\theta$  из уравнения (3.75), найдем

$$-\frac{\partial B_z}{\partial r} = \alpha \frac{\partial}{\partial r} (\alpha r^2 B_z).$$

Интегрирование этого уравнения проводится элементарно, и мы получим

$$B_z = B_0/[1 + (\alpha r)^2], \quad (3.77)$$

$$B_\theta = \alpha r B_0/[1 + (\alpha r)^2]. \quad (3.78)$$

Постоянную  $B_0$  можно определить следующим путем. Представим, что поле окружено длинным цилиндрическим экраном из идеального проводника, имеющим радиус  $R$ . Тогда при изменении шага винтовых силовых линий полный магнитный поток в направлении  $z$  не будет меняться. Вращая пару торцовых пластин, которые ограничивают цилиндр и считаются идеально проводящими, можно менять шаг силовых линий. Будем считать, что в этот цилиндр помещена идеально проводящая плазма, давление в которой равно нулю, так что вдоль силовых линий могут свободно течь токи и в то же время газодинамическое давление плазмы не искажает баланса натяжений.

Если обозначить полный магнитный поток в направлении оси  $z$  величиной  $\varphi$ , простое интегрирование  $B_z$  по площади поперечного сечения даст

$$B_0 = \left\{ \frac{\alpha^2 \varphi}{\pi} \ln [1 + (\alpha R)^2] \right\}. \quad (3.79)$$

Из уравнения видно, что чем больше параметр винтообразности линий  $\alpha$ , т. е. чем меньше шаг этих линий, тем больше концентрация поля вблизи оси. Натяжения, обусловленные компонентой поля  $B_\theta$ , приводят к сжатию силовых линий примерно так же, как закручивание шнура, составленного из резиновых волокон, приводит к их сжатию в направлении оси. В соответствии с этой аналогией можно ожидать, что при достаточно большом значении параметра  $\alpha$  в таком плазменном шнуре образуются перетяжки.

Ситуация, несколько напоминающая только что описанную, имеет место, вероятно, на поверхности Солнца. На рис. 3.5 изображены в проекции участок поверхности фотосферы с парой солнечных пятен и силовые линии магнитного поля, которые, как предполагается, связывают эту пару пятен через пространство над фотосферой. Вся рассматриваемая область характеризуется очень высокой проводимостью, однако при этом в слоях ниже фотосферы гидродинамические силы доминируют над магнитными, тогда

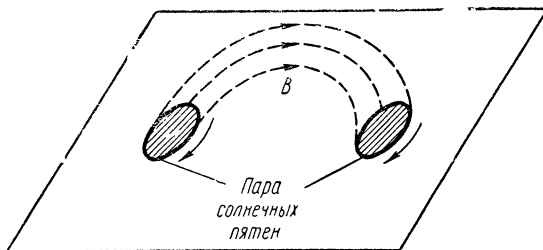


Рис. 3.5. Магнитное поле солнечного пятна.

как выше фотосферы положение обратное. Таким образом, область выше фотосферы можно считать бессиловой. Происхождение магнитного поля не совсем еще ясно, однако предполагается, что оно связано с гидродинамическими особенностями движения плазмы ниже слоя фотосферы. Направление вращения среды в солнечных пятнах, если смотреть на поверхность, например, сверху, имеет одно и то же направление, т. е. по отношению к направлению пучка силовых линий они имеют противоположное направление. Из-за этого силовые линии с течением времени должны постепенно закручиваться. Что, собственно, происходит в итоге этого скручивания, — не удастся наблюдать в деталях. Однако из наблюдений следует, что в магнитном поле пятен периодически происходят какие-то перестройки, носящие характер катаклизмов и возникающие, по-видимому, когда при слишком сильном скручивании в плазме появляются неустойчивости\*. Наблюдаемые вспышки космического излучения солнечного происхождения, вероятно, могут быть приписаны этим перестройкам.

\* Gold T. and Hoyl F. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 120, 89 (1960).

# Г Л А В А 4

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОРБИТ К ДИНАМИЧЕСКИМ ЗАДАЧАМ

### § 4.1. Введение

В этой главе применим метод орбит к некоторым динамическим задачам. При этом мы обнаружим новое свойство — возникновение электрических полей, а также увидим, что дрейф в скрещенных электрическом и магнитном полях вызывает гидродинамические эффекты в плазме.

### § 4.2. Плазма в магнитном поле при наличии сил тяготения

В качестве первого примера рассмотрим поведение плазменного цилиндра в магнитном и гравитационном поле. Пусть магнитное поле направлено по оси  $z$  и не зависит от  $z$ . Рассмотрим цилиндрическую конфигурацию плазмы, не обязательно круговую в сечении, но такую, чтобы ее свойства не менялись в направлении  $z$ . Будем считать, что в первый момент плазма электрически нейтральна. В гл. 3 было доказано, что в отсутствие гравитационного поля плазма находится в покое, пока сумма магнитного и гидродинамического давлений сохраняется постоянной. Токи, вызываемые дрейфами, циркулируют по внешней поверхности цилиндра и не вызывают разделения зарядов.

Для простоты предположим, что давление плазмы  $N\omega_{\perp}$  постоянно внутри цилиндра и

$$N\omega_{\perp} \ll \frac{B^2}{8\pi}. \quad (4.1)$$

Тогда магнитное поле можно также считать приблизительно постоянным во всех точках.

Теперь представим, что в некоторый момент включается гравитационное поле  $g$  вдоль отрицательного направления оси  $y$  (рис. 4.1). Как поведет себя плазма?

Чтобы ответить на этот вопрос, проследим всю цепь причин и следствий, предсказываемых методом орбит. Первой причиной является гравитационная сила, заставляющая ионы дрейфовать налево, а электроны — направо. Возникающее разделение зарядов создает электрическое поле

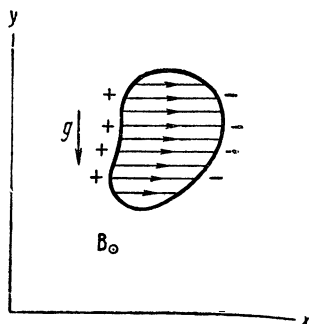


Рис. 4.1. Поляризация плазмы за счет гравитационного дрейфа.

в направлении оси  $+x$ . Это поле в свою очередь вызывает дрейф в отрицательном направлении оси  $y$ , т. е. в направлении действия гравитационной силы. Поэтому весь цилиндр плазмы получит ускорение  $g$ , направленное вниз, как если бы на него магнитное поле совсем не действовало.

При решении изложенной задачи необходимо вычислить электрическое поле, создаваемое разделением зарядов. Это можно легко сделать, рассматривая поляризацию, вызываемую гравитационным дрейфом. Если положительные и отрицательные заряды, первоначально находившиеся в одной точке, под влиянием этого дрейфа удаляются на расстояние  $\Delta r$ , то вызванная этим поляризация (т. е. дипольный момент единицы объема) выражается следующим образом:

$$\mathbf{P} = Ne \Delta \mathbf{r}, \quad (4.2)$$

где  $N$  — плотность зарядов одного знака, скажем, ионов. Величина  $\Delta r$  определяется из выражения для скорости гравитационного дрейфа:

$$\Delta \dot{\mathbf{r}} = c \frac{M}{e} \left[ \mathbf{g}, \frac{\mathbf{B}}{B^2} \right]. \quad (4.3)$$

В этой формуле использована масса ионов  $M$ . Дрейф электронов меньше дрейфа ионов в число раз, равное отношению их масс, и поэтому мы можем им пренебречь. Возникающая при поляризации  $\mathbf{P}$  плотность пространственного заряда равна

$$\rho = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (4.4)$$

Как уже было показано в § 2.5, электрическое поле само по себе вызывает обратную поляризацию, которую можно учесть введением диэлектрической постоянной, согласно уравнению (2.24). Тогда уравнение Максвелла (2.27) приобретает вид

$$\nabla(\epsilon \mathbf{E}) = -4\pi \nabla P.$$

Помимо него поле  $\mathbf{E}$  должно еще удовлетворять тождеству  $[\nabla \mathbf{E}] = 0$ . Одним из решений этих двух уравнений является выражение

$$\mathbf{E} = -4\pi \mathbf{P}/(\epsilon - 1). \quad (4.5)$$

То, что это есть действительно решение, можно доказать следующим образом. Согласно уравнению (4.3),  $\Delta \mathbf{r}$  не зависит явно от пространственных координат частиц, так что  $\mathbf{P}$  просто пропорционально  $N$ . С другой стороны, поскольку

$$\epsilon = 1 + 4\pi N M c^2 / B^2,$$

$\epsilon - 1$  также должно быть пропорционально  $N$ . А из этого следует, что поле  $\mathbf{E}$ , определяемое равенством (4.5), также не зависит от координат как вне, так и внутри цилиндра плазмы. Поэтому  $[\nabla \mathbf{E}] = 0$ . Далее,

$$\nabla(\epsilon \mathbf{E}) = (\mathbf{E}, \nabla \epsilon) = (\mathbf{E}, \nabla(\epsilon - 1)) = \nabla\{(\epsilon - 1)\mathbf{E}\} = -4\pi \nabla P,$$

что и требовалось доказать.

Решение (4.5), однако, является не совсем таким, которое нам нужно, так как, согласно ему, электрическое поле  $\mathbf{E}$  не исчезает на бесконечности. Действительно, на плоскостях с  $x = \pm\infty$  должен, согласно этому решению, существовать заряд с поверхностной плотностью  $E/4\pi$ . Если бы удалось как-то от этого заряда избавиться, получилось бы искомое решение. Но если убрать этот поверхностный заряд, то поле внутри плазмы изменится на долю, пропорциональную  $1/\epsilon$ .

Предположим, что внутри плазмы

$$\epsilon \gg 1. \quad (4.6)$$

Для такого случая выражение (4.5) является решением с точностью до  $1/\epsilon$ .

Теперь можно вычислить скорость дрейфа при действии электрического поля:

$$\mathbf{v}_E = -\frac{e}{Mc} [\Delta \mathbf{r}, \mathbf{B}].$$

Дифференцируя это уравнение по времени и пользуясь уравнением (4.3), найдем

$$\dot{\mathbf{v}}_E = - \left[ \left[ \mathbf{g}, \frac{\mathbf{B}}{B^2} \right], \mathbf{B} \right] = \mathbf{g}. \quad (4.7)$$

Последнее выражение подтверждает вывод о том, что движение плазмы в этом случае есть просто свободное падение.

На границах плазмы, где условие (4.6) несправедливо, поле  $E$  обращается в нуль. Поэтому эти участки плазмы падают со скоростью меньшей, чем в центральной области, поэтому поляризационные заряды как бы сползают с поверхности плазмы.

На этот процесс, однако, оказывает очень сильное влияние большая величина диэлектрической постоянной плазмы. Именно, когда поляризационные заряды покидают поверхность плазмы, на их место из внутренней области приходят другие, причем электрическое поле в плазме меняется на долю, пропорциональную  $1/\epsilon$ .

Исследуем сохранение энергии в рассмотренном примере. Плотность энергии электрического поля равна  $E^2/8\pi$ . Это энергия, которая необходима для того, чтобы разделить заряды плазмы. Кинетическая энергия свободного падения зависит от величины скорости  $v_E$  и ее плотность равна

$$K. \mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{NMc^2}{B^2} E^2. \quad (4.8)$$

Отношение кинетической энергии к энергии разделения зарядов равно

$$\frac{4\pi NMc^2}{B^2} = \epsilon - 1 \gg 1.$$

Тогда, как это следует из уравнения (4.7), кинетическая энергия равняется энергии, приобретаемой в поле тяготения. Как уже было упомянуто в § 2.5, энергия вращательного движения остается постоянной.

Скорость дрейфа, обусловленного электрическим полем, является наибольшей из скоростей дрейфов. Действительно, поляризация, вызываемая тяготением, почти полностью, за исключением доли порядка  $1/\epsilon$ , компенсируется противоположной поляризацией, обусловленной электриче-

ским полем. Таким образом, суммарная скорость дрейфа в направлении оси  $x$  равна

$$v_x \approx \frac{1}{\varepsilon} \frac{Mcg}{eB} = \frac{g}{\varepsilon\omega_i},$$

где  $\omega_i$  — ларморовская частота ионов. Поскольку  $v_E = gt$ , то

$$\frac{v_x}{v_E} \approx \frac{1}{\varepsilon\omega_i t}.$$

Это отношение с течением времени уменьшается. Однако приближение, которое здесь используется, становится наверняка несправедливым, когда ионы успевают под действием суммарной скорости дрейфа  $v_x$  переместиться на расстояние, сравнимое с диаметром цилиндра плазмы.

Полученные только что результаты одинаково применимы для плазмы, заполняющей полость тора в магнитном поле (рис. 4.2).

В этом случае гравитационное ускорение  $g$  заменяется суммой центробежного ускорения  $v_{\parallel}^2/R$  и ускорения  $\frac{1}{2}v_{\perp}^2/R$ , вызванного наличием градиента  $B$ . Если плазма движется с этим ускорением во внешнем от оси направлении, то магнитное поле ее, естественно,

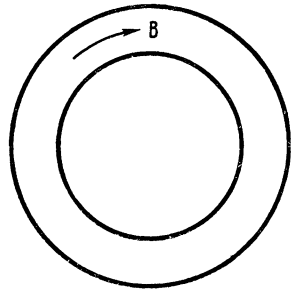


Рис. 4.2. Поле торондальной конфигурации.

не может удержать. Наличие проводящих стенок вокруг тора плазмы может несколько увеличить время удержания плазмы из-за отвода частиц, покидающих плазму в процессе разделения зарядов. Однако время удержания все равно не может быть больше, чем для случая отдельной частицы, дрейфующей под влиянием центробежных сил и сил, обусловленных градиентом  $B$  (см. § 2.10). В последнем примере коллективные эффекты делают это время еще меньшим. В результате общего электрического поля частицы оказываются связанными и плазма ведет себя скорее как упругое твердое тело, чем как множество отдельных частиц.



### § 4.3. Общая двумерная задача для случая, когда силовые линии $\mathbf{V}$ прямые

Освободимся теперь от большинства ограничений предыдущего параграфа. Будем по-прежнему считать, что силовые линии  $\mathbf{V}$  прямые и направлены вдоль оси  $z$  и что остальные свойства не зависят от  $z$ . Однако теперь свойства плазмы и величина  $B$  могут зависеть как от  $x$ , так и от  $y$ . Допустим также существование внешних сил, однако только консервативных, не меняющих энергии вращательного движения. Условие  $N\omega_{\perp} < B^2/8\pi$  не будем более считать необходимым.

Исследуем уравнение Максвелла совместно с уравнениями теории орбит и проследим, к каким следствиям они приводят.

Как и прежде, из уравнения  $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$  следует, что  $\mathbf{V}$  не зависит от  $z$ .

В предыдущем параграфе было показано, что основное значение среди всех скоростей дрейфов имеет скорость электрического дрейфа  $v_E$ . Поэтому отождествим эту скорость с гидродинамической скоростью плазмы и обозначим ее просто  $v$ . Пренебрегая всеми другими скоростями, уравнение сохранения зарядов запишем в виде

$$\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathfrak{N} \mathbf{v}) = 0, \quad (4.9)$$

где  $\mathfrak{N}$  — полусумма электронной и ионной плотностей, весьма мало отличающаяся от каждой из них. (Для возникновения необходимых электрических полей вполне достаточно малой доли  $\mathfrak{N}_e$ ). Различием между  $\mathfrak{N}$ ,  $N_+$  и  $N_-$  можно пренебречь, за исключением случая подсчета суммарной плотности заряда. (Справедливость этих допущений рассмотрена в конце параграфа).

Электрическое поле должно быть перпендикулярно  $\mathbf{V}$ . Разрешая уравнение (3.1) относительно  $\mathbf{E}$ , получим

$$\mathbf{E} = -\frac{B}{c} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}_0]. \quad (4.10)$$

Используя это выражение, можно найти из второго уравнения Максвелла (1.2), что

$$\begin{aligned} [\nabla \mathbf{E}] &= -\frac{1}{c} [\nabla [B\mathbf{v}, \mathbf{B}_0]] = \frac{1}{c} (\mathbf{B}_0, \nabla B\mathbf{v}) = \\ &= -\frac{1}{c} \mathbf{B}_0 \frac{\partial B}{\partial t} \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla(B\mathbf{v}) = 0. \quad (4.11)$$

Согласно уравнениям (4.9) и (4.11), величины  $\mathfrak{R}$  и  $B$  меняются одинаковым образом. Можно себе представить, что линии  $B$  движутся вместе с плазмой. (Этот результат — частный случай теорем, доказанных в § 2.8.)

Уравнение (4.9) можно переписать в виде

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{d\mathfrak{R}}{dt} = -\nabla\mathbf{v}, \quad (4.12)$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla \quad (4.13)$$

есть материальная производная, взятая с учетом движения элемента плазмы.

Аналогично

$$\frac{1}{B} \frac{dB}{dt} = -\nabla\mathbf{v},$$

и поэтому

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathfrak{R}}{B} \right) = 0, \quad (4.14)$$

откуда следует, что значение  $\mathfrak{R}/B$  для фиксированного участка плазмы не зависит от времени.

Прежде чем решать уравнение Максвелла (1.4), выпишем все токи, которые необходимо учесть. Так же как и в § 3.2, сумма тока намагничения и тока, обусловленного градиентами  $B$ , равна

$$\mathbf{j}_{m+g} = \frac{[\mathbf{B}_0 \cdot \nabla N \omega_{\perp}]}{B} = \frac{1}{B} [\mathbf{B}_0, \nabla p], \quad (4.15)$$

где давление

$$p \equiv N \omega_{\perp}. \quad (4.16)$$

Внешняя сила  $\mathbf{F}$  (в расчете на одну частицу) приводит к появлению тока, согласно выражению (3.10). Если определить плотность внешних сил

$$\mathbf{f} = N\mathbf{F}, \quad (4.17)$$

то ток, обусловленный действием внешней силы, можно представить в виде

$$\mathbf{j}_f = \frac{[\mathbf{f}\mathbf{B}_0]}{B}. \quad (4.18)$$

Далее рассмотрим ток поляризации. Изменим определение этого тока, приведенное в § 2.5, с целью учета зависимости диэлектрической постоянной от координат и времени. Покажем, что если принять во внимание эту зависимость, то корректной заменой выражения (2.21) будет

$$\mathbf{j}_p = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{\Re M c^2}{B^2} \mathbf{E} \right), \quad (4.19)$$

где  $d/dt$  — материальная производная;  $M$  — сумма масс ионов и электронов (последней можно, очевидно, пренебречь).

Уравнение движения ионов имеет вид

$$M \frac{d\mathbf{u}}{dt} = e \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} [\mathbf{u}, \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \right\}. \quad (4.20)$$

Обозначим  $\mathbf{u}$  скорость ионов и учтем зависимость  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  от координат и времени. Уравнение (4.20) можно решить аналогично прежнему, имея в виду, что  $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{v}_1$ , где  $\mathbf{v}$  — скорость электрического дрейфа:

$$\mathbf{v} = \frac{c [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}_0]}{B(\mathbf{r}, t)}.$$

Тогда уравнение движения можно записать в виде

$$M \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = -M \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}_1, \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)].$$

Электрическое поле теперь исключено, но в уравнении для  $\mathbf{v}_1$  появилась сила

$$\mathbf{F} \equiv -M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -Mc \frac{d}{dt} \frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}_0]}{B}.$$

Отметим, что производная по времени в этом выражении есть материальная производная, как и в уравнении (4.20). Наличие силы  $\mathbf{F}$  приводит к появлению дрейфа со скоростью

$$\mathbf{v}_F = \frac{c}{e} \frac{[\mathbf{F}\mathbf{B}_0]}{B} = \frac{Mc^2}{eB} \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{E}}{B} \right).$$

Поэтому поляризационный ток равен

$$\mathbf{j}_p = Mc^2 \frac{\Re}{B} \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{E}}{B} \right). \quad (4.21)$$

Так как материальная производная от  $\Re/B$  обращается в нуль, это выражение эквивалентно (4.19). Однако в дальнейшем будем использовать форму (4.21).

Каждый из перечисленных токов существует даже в случае нейтральной плазмы. Если же в плазме возникает пространственный заряд с плотностью  $\rho$ , то появляется еще дополнительный ток

$$\mathbf{j}_\rho = \rho \frac{\mathbf{v}}{c}. \quad (4.22)$$

Далее убедимся, что этим током можно пренебречь.

Подставим токи  $\mathbf{j}_{m+g}$ ,  $\mathbf{j}_f$  и  $\mathbf{j}_\rho$  в уравнение Максвелла (1.4). Учитывая, что  $[\nabla \mathbf{B}] = [\nabla \mathbf{B}, \mathbf{B}_0]$ , находим

$$\begin{aligned} [\nabla \mathbf{B}, \mathbf{B}_0] &= \frac{4\pi}{B} [(-\nabla p + \mathbf{f}), \mathbf{B}_0] + \\ &+ \frac{4\pi}{c} \frac{\Re Mc^2}{B} \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{E}}{B} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Так как предполагалось, что диэлектрическая постоянная плазмы велика, последним членом в приведенном уравнении можно пренебречь по сравнению с предпоследним. Для решения этого уравнения умножим его векторно справа на  $\mathbf{B}_0$ . В результате получим

$$-\frac{B}{4\pi} \nabla B = \nabla p - \mathbf{f} + \Re M \frac{d}{dt} \left( c \frac{[\mathbf{E} \mathbf{B}_0]}{B} \right).$$

Вводя определение плотности массы

$$\rho_m = \Re M, \quad (4.23)$$

результат можно переписать в окончательном виде

$$\rho_m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \nabla \left( \frac{B^2}{8\pi} + p \right). \quad (4.24)$$

Уравнение (4.24) имеет вид гидродинамического уравнения Эйлера с внешней объемной силой  $\mathbf{f}$  и полным давлением  $B^2/8\pi + p$ . Его решение можно найти, если даны начальные значения для  $\rho_m$  и  $\mathbf{v}$  и известно, как вычислить зависимость  $\rho_m$ ,  $B$  и  $p$  от времени. Зависимость этих величин

от времени выражается уравнениями (4.9) и (4.11). Помимо этого получим для  $p$  уравнение состояния, которое выведем из определения  $p$  [уравнение (4.16)]. Зная, что отношение  $\omega_{\perp}/B$  постоянно (точнее, адиабатический инвариант) для каждого данного элемента плазмы, найдем

$$p = \mathfrak{R}B \left( \frac{\omega_{\perp}}{B} \right) = \mathfrak{R}^2 \left( \frac{B}{\mathfrak{R}} \right) \left( \frac{\omega_{\perp}}{B} \right).$$

Однако было установлено, что  $B/\mathfrak{R}$  также является постоянной величиной для фиксированного элемента плазмы. Поэтому

$$p = p_0 \left( \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}_0} \right)^2, \quad (4.25)$$

где  $p_0$  и  $\mathfrak{R}_0$  — начальные значения этих величин для данного элемента объема.

Полученное уравнение состояния совпадает с уравнением адиабаты при показателе политропы  $\gamma = 2$ . Следует напомнить, что идеальный двумерный газ также имеет  $\gamma = 2$ . Так что магнитное поле в плазме ведет себя аналогично невесомому газу с  $\gamma = 2$ .

Ток (4.22), которым ранее пренебрегали, привел бы к появлению в уравнении (4.24) под знаком градиента членов вида  $E^2/8\pi$ . Но так как  $\frac{E}{B} = \left[ \frac{v}{c} \right]$ , этими членами можно пренебречь, пока  $v \ll c$ .

Может показаться странным, что полная система уравнений для определения  $B$ ,  $\mathfrak{R}$  и  $v$  была получена без привлечения уравнения Максвелла (1.1) и даже уравнения сохранения заряда. Совместимы ли полученные уравнения с этими двумя законами? Оснований для беспокойства, однако, нет. Действительно, уравнение сохранения заряда нужно для вычисления плотности по полученным значениям для токов. Далее, электрическое поле полностью определяется выражением (4.10) через  $v$  и  $B$ . Остается только подставить это выражение для электрического поля в уравнение Максвелла (1.1) и проверить их совместимость. В § 1.2 было показано, что если это уравнение удовлетворяется в какой-либо момент времени, оно удовлетворяется и в любой последующий момент. Поэтому мы имеем начальное условие для  $E$ , а следовательно, и для  $v$ , которое может быть записано в виде

$$(\mathbf{B}_0, \nabla B \mathbf{v}) = -4\pi\rho c \quad (4.26)$$

и которое связывает  $v$  с начальными значениями  $\rho$  и  $B$ . С другой стороны, можно рассматривать это равенство как уравнение для определения  $\rho$  по начальным значениям  $B$  и  $v$ . Выведенные выше гидродинамические уравнения совместимы с любым из этих подходов. Величины  $\mathfrak{R}$ ,  $\rho$ ,  $B$  и  $v$  или  $\rho$  можно в начальный момент задавать произвольными. Если вместо  $v$ , взять  $\rho$ , то все равно можно выбрать значение  $\nabla B v$  произвольно, поскольку уравнение (4.26) определяет только  $[\nabla, Bv]$ .

Исходя из аналогии полученных уравнений с гидродинамическими, можно использовать для наших целей результаты, полученные при изучении плоских гидродинамических задач. Именно по этой причине некоторые разделы физики плазмы получили название «магнитной гидродинамики». Однако уже для многих трехмерных задач эта аналогия оказывается несправедливой и использование гидродинамических законов требует осторожности.

В заключение проверим сделанное в начале этого параграфа допущение о незначительном различии  $N_+$  и  $N_-$ . Это предположение справедливо, если

$$\frac{\rho}{\mathfrak{R}e} \ll 1. \quad (4.27)$$

Величину плотности заряда можно оценить из уравнения Максвелла (1.1)

$$\rho \approx \frac{E}{L},$$

где  $L$  — расстояние между областями, имеющими противоположные знаки суммарного заряда, т. е. расстояние, на котором усредненные параметры плазмы существенно меняются. Используя уравнение (4.10), найдем

$$\rho \approx \frac{vB}{cL} \quad \text{или} \quad \frac{\rho}{\mathfrak{R}e} \approx \frac{v}{c} \frac{B}{\mathfrak{R}eL}.$$

Исключив справа  $\mathfrak{R}$  путем введения диэлектрической постоянной, получим

$$\frac{\rho}{\mathfrak{R}e} \approx \frac{v}{c} \frac{1}{\varepsilon} \frac{Mc^2}{eBL} \approx \frac{1}{\varepsilon} \frac{v}{\omega_i L},$$

где  $\omega_i$  — ларморовская частота ионов. Поскольку мы ранее предположили, что

$$\varepsilon \gg 1, \quad (4.28)$$

нам нужно потребовать, чтобы

$$\frac{v}{\omega_i L} \ll 1. \quad (4.29)$$

Таким образом, расстояние, на которое плазма перемещается за один ларморовский период, должно быть меньше  $L$ .

#### § 4.4. Поляризация плазмы, заключенной между проводящими плоскостями

В § 4.2 упоминалось, что наличие проводящих стенок в плазме может существенно повлиять на ее поведение в результате отвода электрических зарядов, которые в противном случае привели бы к образованию электрического поля и обусловленного им дрейфа. Характер влияния стенок зависит от их свойств, от того, поглощают ли они только попадающие на них частицы или также испускают вторичные заряженные частицы.

Рассмотрим поведение плазмы, заключенной между плоскими проводящими поверхностями, поглощающими все падающие на них частицы. Подобные системы можно использовать для ускорения плазмы,

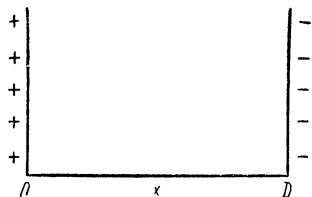


Рис. 4.3. Плазма между проводящими плоскостями.

прилагая электрическое поле (нормально к плоскостям) и перпендикулярное ему магнитное поле. Покажем, что при увеличении разности потенциалов между пластинами вблизи положительной пластины образуется пограничный слой. Большая часть полной разности потенциалов падает на этом пограничном слое. Подобные слои характерны для всех диэлектриков и отличаются только в деталях.

Пусть проводящие плоскости перпендикулярны оси  $x$ , причем положительная плоскость имеет координату  $x = 0$ , а отрицательная  $x = D$ . Электрическое поле тогда направлено по оси  $x$ . Магнитное поле будем считать направленным перпендикулярно поверхности чертежа (рис. 4.3) и постоянным. Пусть плотности ионов и электронов в начальный момент постоянны. Предположим, что тепловая энергия или, что все равно, энергия движения частиц по ларморовской окружности настолько мала, что ларморовский

радиус также крайне мал. Более того, будем считать, что электрическое поле включается достаточно медленно, поэтому ларморовский радиус продолжает оставаться малым.

Частица с координатой  $x$ , находящаяся в электрическом поле  $E(x)$ , обладает энергией дрейфового движения

$$\omega_D = \frac{mc^2}{2} \frac{E^2(x)}{B^2}. \quad (4.30)$$

Если электрическое поле, действующее на частицу, изменится на величину  $\delta E$ , то энергия дрейфового движения частицы изменится на

$$\delta\omega_D = mc^2 \frac{E}{B^2} \delta E. \quad (4.31)$$

Как мы установили в гл. 2, частица приобретает эту энергию, двигаясь в направлении поля  $E$ . Величина смещения частицы  $\delta x$  может быть определена из соотношения

$$eE(x) \delta x = mc^2 \frac{E(x)}{B^2} \delta E. \quad (4.32)$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$x - x_0(x) = \frac{mc^2}{eB^2} E(x), \quad (4.33)$$

где  $x_0(x)$  — начальная координата частицы, имеющая в настоящий момент координату  $x$ . Будем считать, что электрическое поле в начальный момент равно нулю. Этот вывод поляризационного эффекта в отличие от сделанного в гл. 2 достаточно точен для того, чтобы показать зависимость смещения частицы от значения электрического поля в конечной точке нахождения этой частицы.

Область вблизи положительной плоскости. В соответствии с уравнением (4.33) ионы движутся направо, а электроны — налево (см. рис. 4.3). Часть электронов попадает при этом на пластину, а ионы уходят от нее, в силу чего вблизи этой пластины оказывается избыток электронов. Рассмотрим подробнее эту область.

Плотность электронов в этой области должна удовлетворять уравнению непрерывности:

$$N_-(x) dx = N_0 dx_0 \quad \text{или} \quad N_- = N_0 \frac{dx_0}{dx}. \quad (4.34)$$



Из уравнения (4.33)

$$\frac{dx_0}{dx} = 1 + \alpha_- \frac{dE}{dx}, \quad (4.35)$$

где  $\alpha_-$  примем равным

$$\alpha_- = \frac{mc}{eB^2}. \quad (4.36)$$

В этом выражении  $e$  нужно считать положительной величиной. Уравнение Пуассона для такой области имеет вид

$$\frac{dE}{dx} = -4\pi N_- e. \quad (4.37)$$

Комбинируя уравнения (4.37), (4.35) и (4.34), находим

$$N_- = \frac{N_0}{\epsilon_-}, \quad (4.38)$$

где

$$\epsilon_- = 1 + 4\pi \frac{N_0 mc^2}{B^2} \quad (4.39)$$

есть диэлектрическая постоянная, учитывающая влияние электронов. Если напряженность электрического поля на поверхности положительной пластины равна  $E_0$ , из уравнения (4.37) получим

$$E(x) = E_0 - 4\pi \frac{N_0 e}{\epsilon_-} x. \quad (4.40)$$

Из уравнения (4.40) видно, что поле в этой области падает линейно от положительной плоскости.

Поверхностная плотность суммарного заряда на положительной плоскости равна  $\sigma_0 = \frac{E_0}{4\pi}$ . Число электронов, попадающих на единицу поверхности этой плоскости, дается выражением

$$N_0 \alpha_- E_0.$$

Поэтому полный положительный заряд  $\delta_+$ , который нужно подвести извне к этой плоскости, должен быть равен

$$\sigma_+ = \sigma_0 + e N_0 \alpha_- E_0 = \frac{\epsilon_-}{4\pi} E_0. \quad (4.41)$$

Позднее мы свяжем  $\sigma_+$  с полным падением потенциала между плоскостями и тем самым определим емкость всей системы.

Граница рассмотренной области проходит при  $x = x_1$ , где напряженность  $E(x_1)$  становится достаточной для того, чтобы переместить ионы из точки 0 в точку  $x_1$ . Учитывая это, из уравнений (4.33) и (4.40) находим

$$x_1 = \alpha_+ E(x_1) = \alpha_+ \left[ E_0 - 4\pi \frac{N_0 e}{\epsilon_-} x_1 \right], \quad (4.42)$$

где

$$\alpha_+ = \frac{Mc^2}{eB^2}. \quad (4.43)$$

Разрешая уравнение (4.42) относительно  $x_1$ , окончательно имеем

$$x_1 \approx \alpha_- E_0, \quad (4.44)$$

где мы предположили, что

$$\epsilon_- \gg 1. \quad (4.45)$$

Можно без труда получить и более точное выражение для  $x_1$ , однако случай, описываемый условием (4.45), наиболее интересен и позволяет получить более простые формулы. В дальнейшем будем везде придерживаться этого приближения и, более того, везде отбрасывать члены порядка  $m/M$  по сравнению с единицей.

Используя уравнение (4.44), можно из выражения (4.42) найти напряженность электрического поля в точке  $x_1$

$$E_1 \doteq E(x_1) = \frac{x_1}{\alpha_+} = \frac{\alpha_-}{\alpha_+} E_0 = \frac{m}{M} E_0. \quad (4.46)$$

Значение поля, как видно, в этой точке в  $m/M$  раз меньше, чем на пластине.

Центральная область плазмы. В этой области присутствуют как ионы, так и электроны. При помощи того же метода, который был нами использован для электронов, находим плотности ионов и электронов в центральной области:

$$N_- = N_0 \left[ 1 + \alpha_- \frac{dE}{dx} \right], \quad N_+ = N_0 \left[ 1 - \alpha_+ \frac{dE}{dx} \right]. \quad (4.47)$$

Уравнение Пуассона принимает тогда вид

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi e (N_+ - N_-) = -4\pi N_0 e (\alpha_+ + \alpha_-) \frac{dE}{dx}.$$

Единственное его решение есть

$$E = E_1 = \text{const.} \quad (4.48)$$

Таким образом, поле в центральной области постоянно.

Область вблизи отрицательной пластины. Вблизи отрицательной пластины располагается область, свободная от электронов. Исследование свойств этой области может быть проведено совершенно так же, как и для области около положительной пластины, за исключением того, что ионы и электроны теперь поме-

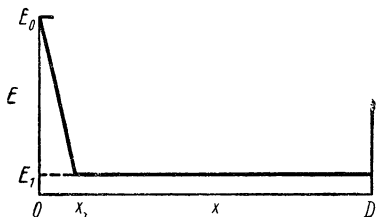


Рис. 4.4. Распределение поля в плазме между параллельными электродами.

нялись ролями. Ввиду этой замены эффект вблизи отрицательной пластины весьма мал по величине. Толщина граничного слоя в этом случае в  $M/m$  раз меньше  $x_1$  [равенство (4.44)]. Напряженность электрического поля внутри этого слоя возрастает от значения  $E_1$  лишь до  $E_1(1 + \frac{m}{M})$ . Но таким из-

менением можно полностью пренебречь. Величина положительного заряда, передаваемого отрицательной пластине, равна величине отрицательного заряда, передаваемого положительной пластине, умноженной на  $(1 + \frac{m}{M})$ . Вблизи отрицательной пластины имеется избыточное количество электронов, пропорциональное  $m/M$ , так что баланс заряда соблюдается, как и следовало ожидать.

На рис. 4.4 изображено распределение напряженности электрического поля  $E(x)$ . Полная разность потенциалов между пластинами равна

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} (E_0 + E_1) x_1 + E_1 (D - x_1) \approx \\ &\approx \frac{1}{2} E_0 x_1 + E_1 D = \frac{1}{2} \alpha_- E_0^2 + \frac{m}{M} D E_0. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Величина  $E_0$  связана с количеством заряда  $\sigma_+$ , подводимым извне к положительной пластине уравнением (4.41). Таким образом, связь заряда и потенциала является нелинейной, причем эта нелинейность обусловлена резким скачком потен-

циала у положительной пластины. Для большинства обычных диэлектриков величина этого скачка пренебрежимо мала по сравнению с общей разностью потенциалов. Для плазмы же граничным скачком потенциала зачастую нельзя пренебречь.

Разрешая уравнение (4.49) относительно  $E_0$ , найдем

$$E_0 = \frac{mD}{\alpha_- M} \left( \sqrt{1 + 2\alpha_- V \left(\frac{M}{mD}\right)^2} - 1 \right). \quad (4.50)$$

Полезно рассмотреть два предельных значения этого выражения в зависимости от  $\gamma$  — величины второго члена под радикалом. Его численное значение для дейтерия равно

$$\gamma \equiv 2\alpha_- V \left(\frac{M}{mD}\right)^2 \approx 10^8 \left(\frac{V}{B^2 D^2}\right), \quad (4.51)$$

где потенциал  $V$  — в вольтах, напряженность магнитного поля  $B$  — в гауссах, расстояние  $D$  — в сантиметрах.

Для случая  $\gamma \ll 1$  уравнение (4.50) сводится к

$$E_0 = \frac{M}{m} \frac{V}{D}. \quad (4.52)$$

Если площадь пластин равна  $A$ , то, комбинируя выражения (4.52) и (4.41), можно вычислить емкость системы (в электростатических единицах):

$$C = \frac{A}{4\pi D} \frac{M}{m} \epsilon_- = \frac{A}{4\pi D} \epsilon_+ (\gamma \ll 1), \quad (4.53)$$

где  $\epsilon_+$  — диэлектрическая постоянная с учетом одних ионов. Этот результат естественен для случая, когда граничным скачком потенциала можно пренебречь. Выражение для поля в глубине объема плазмы имеет вид

$$E_1 \approx \frac{V}{D} (\gamma \ll 1). \quad (4.54)$$

Если  $\gamma \gg 1$ , то уравнение (4.50) принимает форму

$$E_0 = \sqrt{\frac{2V}{\alpha_-}}. \quad (4.55)$$

В этом случае связь между полным зарядом  $Q$  (в электростатических единицах), подводимым извне к пластине

(имеющей площадь  $A$ ), и разностью потенциалов  $V$  определяется следующим уравнением:

$$Q = \sigma_+ A = \frac{\varepsilon_- A}{4\pi} \sqrt{\frac{2\bar{V}}{\alpha_-}}. \quad (4.56)$$

Если в качестве единиц измерения физических величин в этом выражении использовать кулоны, вольты, гауссы и сантиметры, оно примет вид

$$Q = 0,53 \cdot 10^{-18} \left( \frac{N_0 A}{B} \right) \sqrt{\bar{V}}. \quad (4.57)$$

В тех же единицах (вольт на сантиметр) электрические поля  $E_0$  и  $E_1$  равны

$$E_0 = 0,6 \cdot B \sqrt{\bar{V}}, \quad E_1 = \frac{m}{M} E_0, \quad (4.58)$$

а толщина граничного слоя

$$x_1 = 3,3 \frac{V \sqrt{\bar{V}}}{B}. \quad (4.59)$$

Необходимо учитывать, что теория, построенная на движении ларморовских окружностей, становится неприменимой, когда  $E_0$  (в электростатических единицах) больше  $B$  (в гауссах). Отношение  $E_0/B$  в этих единицах для нашего случая

$$\frac{E_0}{B} = 2 \cdot 10^{-3} \sqrt{\bar{V}}, \quad (4.60)$$

где  $V$  в вольтах.

Проведенное рассмотрение может легко быть распространено на случай цилиндрических электродов при условиях, что толщина граничного слоя много меньше радиуса положительного электрода и что частицы не смещаются на расстояния, сравнимые с их начальными расстояниями от оси. При этих условиях свойства граничного слоя практически те же, что и в плоском случае. В глубине объема плазмы электрическое поле, однако, уже не постоянно, а уменьшается по закону  $1/r$ , как и должно быть в случае осевой симметрии.

Резкое изменение напряженности электрического поля в граничном слое должно приводить в нем к фокусировке

электронов по скоростям. Представляется вероятным, что в граничном слое может возникнуть неустойчивость гельмгольцевского типа, в результате которой скачок потенциала может исчезнуть.

#### **§ 4.5. Замечания относительно общей динамической задачи**

В гл. 3 и 4 предполагалось, что средние значения таких величин, как плотность, температура и напряженность поля, меняются лишь незначительно на расстояниях порядка ларморовского радиуса и на протяжении времени порядка ларморовского периода. Если это предположение перестает быть справедливым, то аналогия с гидродинамикой и гидростатикой нарушается.

Сделаем еще одну оговорку, а именно — свойства плазмы не меняются в направлении магнитного поля.

Ввиду возможности свободного перемещения частиц вдоль силовых линий магнитного поля невозможно составить уравнения типа гидродинамических, которые описывали бы крупномасштабные движения в этом направлении. Возможность использования гидродинамического подхода основывается на ограничении свободы перемещения частиц, либо из-за столкновений (случай обычной гидродинамики неразрезанных сред), либо из-за конечности их ларморовского радиуса (поперечные к магнитным силовым линиям движения плазмы).

Когда же хотя бы одно из перечисленных ограничений нарушается, необходимо возвратиться к исходному общему методу — анализу уравнений Ньютона для отдельных частиц или, что все равно, к уравнению Лиувилля. В гл. 5 заново рассмотрим статическую задачу, отбросив предположение о малости градиентов. В гл. 6, рассматривая движения с малой амплитудой, избавимся от ограничения достаточно низкими частотами и от условия постоянства характеристик плазмы вдоль направления **V**.

# Г Л А В А 5

---

## ТОЧНЫЕ СТАТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

### § 5.1. Введение

В гл. 3 было показано, что граница между плазмой и вакуумом в магнитном поле может иметь произвольную форму при условии, что толщина переходного слоя много больше ларморовского радиуса.

В частности, для плоского случая единственным условием, накладываемым на конфигурацию плазмы, является уравнение баланса давлений

$$\frac{B^2}{8\pi} + N\omega_{\perp} = \text{const.} \quad (5.1)$$

В настоящей главе с помощью более точного метода исследуем граничные слои малой толщины, к которым первое приближение метода орбит неприменимо. При этом ограничимся статическим случаем.

В § 5.2 рассматривается одномерная задача проникновения магнитного поля достаточно глубоко в плазму. В этом случае нет частиц, постоянно находящихся в области магнитного поля, т. е. захваченных этим полем.

В последних трех параграфах показано, как строится общее решение уравнений Максвелла и Лиувилля для статической самосогласованной задачи в плоском и цилиндрическом случаях без каких бы то ни было приближений и ограничения случаев тонких граничных слоев.

## § 5.2. Нормальное к границе движение положительных и отрицательных частиц равной массы \*

Сначала рассмотрим физически нереальный, но простой случай, позволяющий легко получить точное решение. Предположим, что массы положительных и отрицательных частиц равны и частицы движутся перпендикулярно к границе с равными скоростями. Пусть  $\mathbf{B}$  направлено по оси  $z$  и зависит только от  $x$  (рис. 5.1). Частицы движутся к границе в положительном направлении вдоль оси  $x$ . Положительные и отрицательные частицы отклоняются магнитным полем в противоположных направлениях. Это создает ток, направленный в отрицательном направлении оси  $y$ , который приводит к затуханию магнитного поля в граничном слое. Ввиду равенства масс положительных и отрицательных частиц разделения зарядов не происходит, и поэтому электрическое поле отсутствует.

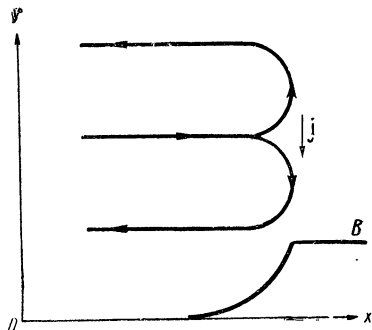


Рис. 5.1. Траектории частиц в граничном слое.

Уравнения движения частиц имеют вид

$$\frac{dv_x}{dt} = \left(\frac{e}{mc}\right) v_y B;$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\left(\frac{e}{mc}\right) v_x B,$$

где  $v_x$  и  $v_y$  — компоненты скорости. Поскольку все величины можно считать функциями только  $x$  и  $\frac{d}{dt} = v_x \frac{d}{dx}$ , уравнения движения можно переписать в виде

$$v_x \frac{dv_x}{dx} = \left(\frac{e}{mc}\right) v_y B; \quad (5.2)$$

$$\frac{dv_y}{dx} = -\left(\frac{e}{mc}\right) B. \quad (5.3)$$

\* В основу этого и следующих параграфов положены неопубликованные работы М. Розенבלата и Р. Гарвина.



Умножив уравнение (5.3) на  $v_y$  и сложив его с уравнением (5.2), найдем, что энергия есть интеграл движения:

$$\frac{d}{dx} (v_x^2 + v_y^2) = 0 \quad \text{или} \quad v_x^2 + v_y^2 = v_0^2, \quad (5.4)$$

где  $v_0$  — начальная скорость в направлении оси  $x$ .

Введем векторный потенциал для магнитного поля  $\eta(x)$ :

$$B = \frac{d\eta}{dx} \quad \text{или} \quad dx = \frac{d\eta}{B}. \quad (5.5)$$

Используя  $\eta$  в уравнениях (5.4), найдем второй интеграл движения

$$mv_y + \frac{e}{c} \eta = \text{const} = 0, \quad (5.6)$$

где принято, что  $\eta = 0$  при  $x \rightarrow -\infty$ .

Этот второй интеграл движения является обобщенным импульсом в направлении оси  $y$ . Он действительно интеграл движения, поскольку гамильтониан не зависит от  $y$ .

Уравнение Максвелла (1.4) в этом случае имеет вид

$$-\frac{\partial B}{\partial x} = -B \frac{dB}{d\eta} = 4\pi j_y = 4\pi \frac{Nev_y}{c},$$

где  $N$  — полная плотность частиц обоих знаков и обоих направлений движения. (Очевидно, что для всех частиц величина  $ev_y$  — одинакова.) Переписывая уравнение Максвелла еще раз, имеем

$$\frac{d}{d\eta} \left( \frac{B^2}{8\pi} \right) = -j_y = -\frac{Nev_y}{c}, \quad (5.7)$$

причем плотность  $N$  должна удовлетворять уравнению сохранения массы  $Nv_x = N_0 v_0$ , где  $N_0$  — плотность частиц при  $x \rightarrow -\infty$ . Используя уравнение (5.4)

$$\frac{Nev_y}{c} = \frac{Nev_0}{c} \frac{v_y}{x} = \frac{Nev_0}{c} \frac{v_y}{\sqrt{v_0^2 - v_y^2}}.$$

Окончательно, выражая с помощью уравнения (5.6)  $v_y$  через  $\eta$  и подставляя в уравнение (5.7), находим

$$\frac{d}{d\eta} \left( \frac{B^2}{8\pi} \right) = \frac{N_0 e^2}{mc^2} \frac{\eta}{\sqrt{1 - [(e/mv_0 c) \eta]^2}}.$$

Это уравнение может быть непосредственно проинтегрировано, в результате чего получаем

$$\frac{B^2}{8\pi} = N_0 m v_0^2 \left\{ 1 - \sqrt{1 - [(e/mv_0 c) \eta]^2} \right\}. \quad (5.8)$$

В последнем выражении первый член в скобках является интегралом движения, выбранным таким образом, чтобы при  $x \rightarrow -\infty$   $B$  обращается в нуль одновременно с  $\eta$ .

Из уравнения (5.6) максимальное значение  $\eta$  равно  $\frac{mv_0 c}{e}$ , поскольку в точке поворота (для положительных частиц)  $v_y = -v_0$ . Таким образом, если  $B_0$  есть значение  $B$  за точкой поворота, то из уравнения (5.8) получаем

$$\frac{B_0^2}{8\pi} = N_0 m v_0^2, \quad (5.9)$$

т. е. давление, создаваемое частицами достаточно глубоко в плазме, равно магнитному давлению вне плазмы.

Уравнение (5.8) дает зависимость  $B$  от  $\eta$ . С помощью уравнения (5.5) можно также найти зависимость  $x$  от  $\eta$ :

$$dx = \frac{1}{B_0} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \sqrt{1 - [(e/mv_0 c) \eta]^2}}}.$$

Введем новую переменную

$$s = \left( \frac{e}{mv_0 c} \right) \eta, \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (5.10)$$

Тогда

$$dx = a \frac{ds}{\sqrt{1 - \sqrt{1 - s^2}}}, \quad (5.11)$$

где  $a$  — ларморовский радиус, равный

$$a = \frac{mv_0 c}{eB}. \quad (5.12)$$

Теперь видно, что толщина граничного слоя по существу равна ларморовскому радиусу.

Уравнение (5.11) может быть проинтегрировано способом тригонометрической подстановки:

$$s = \sin 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \quad (5.13)$$

что дает

$$\frac{x}{a\sqrt{2}} = \ln \left[ \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right] + 2 \cos \varphi. \quad (5.14)$$

Перепишав уравнение (5.8) с использованием  $\varphi$ , получим

$$\frac{B}{B_0} = \sqrt{2} \sin \varphi. \quad (5.15)$$

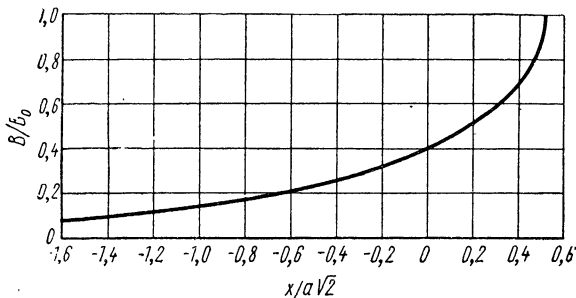


Рис. 5.2. Зависимость напряженности магнитного поля в области граничного слоя.

Зависимость  $\frac{B}{B_0}$  от  $\frac{x}{a}$  представлена на рис. 5.2. Из формулы (5.15) видно, что для малых  $\varphi$  (больших отрицательных  $x$ )

$$\frac{B}{B_0} \approx 2\sqrt{2} \exp \left[ \frac{x}{a\sqrt{2}} - 2 \right]. \quad (5.16)$$

### § 5.3. Нормальное к границе движение реальных частиц

Предположим теперь, что электроны и ионы приближаются к границе с равными скоростями. Ввиду меньшей массы электронов их траектории изгибаются магнитным полем сильнее, чем траектории ионов. В силу этого ионы будут опережать электроны. Возникающее при этом разделение зарядов приводит к образованию электрического поля, направленного по оси  $x$ , которое тормозит ионы и ускоряет электроны. Для создания соответствующего электрического поля требуется весьма незначительное разделение зарядов. Действительно, предположим, что с точ-

ностью до первого порядка плотности электронов и ионов равны:

$$N_+(x) = N_-(x). \quad (5.17)$$

(Исследование справедливости этого приближения оставим на будущее.) В равенстве (5.17)  $N_+(x)$  — плотность ионов, движущихся в обе стороны;  $N_-(x)$  — плотность электронов. Уравнения сохранения числа частиц запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} N_+(x) v_{x+}(x) &= N_0 v_0; \\ N_-(x) v_{x-}(x) &= N_0 v_0, \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

где  $N_0$  — плотность ионов (и электронов) в глубине объема плазмы. С учетом уравнения (5.17) из уравнения сохранения получаем

$$v_{x+}(x) = v_{x-}(x). \quad (5.19)$$

Таким образом, если плотности ионов и электронов равны, их скорости в положительном и отрицательном направлениях также равны. Поэтому можно опустить значки  $\pm$  у  $v_x$ .

Слагающая уравнения движения ионов вдоль оси  $x$  тогда будет

$$M v_x \frac{dv_x}{dx} = eE(x). \quad (5.20)$$

Действием магнитного поля на ионы пренебрежем. Допустимость этого будет показана позже.

Соответствующее уравнение движения для электронов можно записать в виде

$$m v_x \frac{dv_x}{dx} = -|e| \left[ E + \frac{1}{c} v_y B \right].$$

Используя уравнение (5.20) для исключения  $E$  из последнего уравнения и пренебрегая массой электрона в сравнении с массой иона, находим\*

$$M v_x \frac{dv_x}{dx} = \frac{e}{c} v_y B. \quad (5.21)$$

(В этом уравнении  $e$  может иметь знак, соответствующий электрону.) Наличие в уравнении массы иона означает,

\* Здесь  $v_y$  относится к электронам.

что импульс ионов передается с помощью электрического поля электронам.

Другое уравнение движения для электронов, (5.3), остается неизменным, так же как и уравнение Максвелла (5.7). Вклад ионов в величину  $j_y$  будет меньше вклада электронов в  $m/M$  раз. Таким образом, нам необходимо решить совместно уравнения (5.3), (5.7) и (5.21).

Заменой переменной  $v_x$  можно придать уравнению (5.21) вид, аналогичный (5.2), не меняя при этом других уравнений. Положим

$$V_x = v_x \sqrt{\frac{M}{m}} \quad \text{и} \quad V_0 = v_0 \sqrt{\frac{M}{m}}. \quad (5.22)$$

Тогда уравнение (5.21) приобретает вид

$$V_x \frac{dV_x}{dx} = \frac{e}{mc} v_y B.$$

Решение этого уравнения отличается от предыдущего случая лишь заменой характерной длины, определяемой выражением (5.12), на величину

$$a' = \frac{mV_0 c}{eB_0} = \sqrt{mM} \frac{v_0 c}{eB}. \quad (5.23)$$

Очевидно, что эта величина есть среднее геометрическое из ларморовских радиусов иона и электрона. Поскольку толщина пограничного слоя, определяемая величиной  $a'$ , значительно меньше ларморовского радиуса ионов, пренебрежение действием магнитного поля на ионы было вполне оправданным.

Уравнение для энергии (5.4) в данном случае приобретает вид

$$\frac{M}{m} \cdot v_x^2 + v_y^2 = \frac{M}{m} v_0^2. \quad (5.24)$$

Оно выражает сохранение суммы энергий ионов и электронов. В точке поворота, при  $v_x = 0$ , электроны имеют энергию  $\frac{1}{2} m v_y^2 = \frac{1}{2} M v_0^2$ , т. е. они приобретают энергию, которой первоначально обладали ионы. Скорость электронов в направлении оси  $y$  равна  $v_y = v_0 \sqrt{M/m}$ , и поэтому их орбиты вытянуты в направлении этой оси пропорционально величине  $(M/m)^{1/2}$ .

Убедимся теперь, что напряженность электрического поля, достаточная для заворачивания ионных траекторий в обратном направлении, на длине  $a'$ , может быть создана плотностью заряда, малой по сравнению с  $N_0 e$ . Для того чтобы изменить скорость ионов на равную по величине и противоположную по направлению, необходима разность потенциалов

$$eEa' \approx \frac{1}{2} Mv_0^2.$$

Для образования электрического поля  $E$ , согласно уравнению Пуассона, необходима плотность

$$\rho \approx \frac{1}{4\pi} \frac{E}{a'} \approx \frac{1}{8\pi} \frac{Mv_0^2}{ea'^2} \approx \frac{B_0^2}{8\pi} \frac{e}{mc^2}.$$

Поэтому

$$\frac{\rho}{N_0 e} = \frac{B_0^2}{8\pi} \cdot N_0 mc^2.$$

Поскольку уравнение баланса давлений (5.9) в нашем случае имеет вид

$$\frac{B^2}{8\pi} = N_0 Mv_0^2, \quad (5.25)$$

получим

$$\frac{\rho}{N_0 e} = \frac{Mv_0^2}{mc^2}. \quad (5.26)$$

Таким образом, плотность  $\rho$  значительно меньше  $N_0 e$  в том случае, когда отношение кинетической энергии ионов к собственной энергии электрона (250 кэв) также мало. В слое между точками поворота электронов и границей плазмы, очевидно, будут находиться только ионы, однако толщина этой области мала по сравнению с  $a'$ .

#### § 5.4. Решение задачи о граничном слое с помощью уравнения Лиувилля

Рассмотрим теперь ту же самую задачу о граничном слое с точки зрения уравнения Лиувилля. Результат не будет отличаться от полученного выше, однако такое рассмотрение, при котором физический смысл результатов

может быть объяснен с помощью сделанного ранее одночастичного рассмотрения, весьма полезно.

Сохраним те же обозначения координат, что и в § 5.2, и пусть магнитное поле направлено вдоль оси  $z$ , а электрическое (образующееся в результате разделения зарядов) — вдоль оси  $x$ .

Поскольку задача статическая, функция распределения не должна зависеть от времени. Ввиду того что задача еще и плоская, она не будет также содержать зависимость от  $y$ . Так как в направлении оси  $z$  не действуют никакие силы, распределение по  $v_z$  произвольно, и зависимость от  $v_z$  можно опустить без ущерба для общности рассмотрения. Таким образом,

$$f = f(x, v_x, v_y). \quad (5.27)$$

Уравнение Лиувилля для нашей задачи имеет вид

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{e}{m} E \frac{\partial f}{\partial v_x} + \frac{e}{mc} B \left( v_y \frac{\partial}{\partial v_x} - v_x \frac{\partial}{\partial v_y} \right) f = 0. \quad (5.28)$$

Для дальнейшего удобнее использовать векторный потенциал  $\eta$ , определенный равенством (5.5) (точнее,  $\eta$  — слагающая векторного потенциала вдоль оси  $y$ ), и скалярный потенциал, определяемый соотношением

$$E = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (5.29)$$

С учетом этих обозначений уравнение Лиувилля приобретает форму

$$mv_x \frac{\partial f}{\partial x} + e \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v_x} + \frac{e}{c} \frac{\partial \eta}{\partial x} \left( v_y \frac{\partial}{\partial v_x} - v_x \frac{\partial}{\partial v_y} \right) f = 0. \quad (5.30)$$

Общее решение этого уравнения можно получить, воспользовавшись теоремой о том, что общее решение уравнения Лиувилля есть произвольная функция интегралов движения. Справедливость последнего утверждения очевидна, поскольку дифференциальный оператор уравнения (1.56), фигурирующий в уравнении Лиувилля, есть просто полная материальная производная по времени (т. е. взятая вдоль траектории движения частицы), а интегралы движения по определению не меняются при движении частицы. Обычно эта теорема не облегчает задачу, так как найти все интегралы движения очень трудно. Однако в дан-

ном случае ее достаточно для решения уравнения (5.30). Одним из интегралов движения является энергия

$$\omega = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2) + e\varphi(x), \quad (5.31)$$

вторым — слагающая обобщенного импульса вдоль оси  $y$

$$p_y = mv_y + \frac{e}{c} \eta(x). \quad (5.32)$$

(Наличие второго интеграла следует из того, что  $\varphi$  и  $\eta$  не зависят от  $y$ .) Непосредственной подстановкой можно проверить, что любая функция вида

$$f = f(\omega, p_y) \quad (5.33)$$

является решением уравнения (5.30).

Наличие общего решения вида (5.33) можно объяснить следующим образом. Возьмем в частном случае функцию  $f$  в виде

$$f = \delta(\omega - \omega_0) \delta(p_y - p_{y0}), \quad (5.34)$$

где символом  $\delta$  обозначена дельта-функция, а  $\omega_0$  и  $p_{y0}$  — постоянные. Это решение везде обращается в нуль, кроме точек, определяемых уравнениями:

$$p_y = mv_y + \frac{e}{c} \eta(x) = p_{y0} \quad (5.35)$$

и

$$\omega = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2) + e\varphi(x) = \omega_0. \quad (5.36)$$

Эти уравнения определяют траекторию частицы. Действительно, для каждого значения  $x$  из первого уравнения можно найти  $v_y$ , а из второго  $v_x$ , что достаточно для определения траектории. Уравнения (5.35) и (5.36) являются обобщением на случай наличия  $\varphi$  уравнений (5.6) и (5.4), выведенных непосредственно из уравнений движения. Таким образом, видно, что с помощью уравнения Лиувилля можно описывать поведение даже одиночной частицы. Общее решение задачи должно представлять совокупность подобных отдельных траекторий, наиболее общей формой описания которых является выражение (5.33).

Для того чтобы исключить из рассмотрения захваченные частицы, убедимся в том, что траектории отдельных частиц выходят за пределы граничного слоя. Для этого окажутся полезными уравнения (5.35) и (5.36).



## § 5.5. Два упрощающих предположения

Для ионов постоянство слагающей импульса вдоль оси  $y$  означает, что

$$Mv_y + \frac{e}{c} \eta(x) = Mv_{y0}, \quad (5.37)$$

где  $M$  — масса иона;  $v_{y0}$  — скорость вдоль оси  $y$  в глубине объема плазмы, т. е. при  $x \rightarrow -\infty$ ;  $\eta = 0$  (см. § 5.2). Для электронов справедливо уравнение, отличающееся от (5.37) заменой  $M$  на  $m$ . Если ионы имеют ту же начальную скорость, что и электроны, то их импульс много больше, чем у электронов. Это справедливо и в том случае, когда они имеют одинаковую энергию. Поэтому оказывается возможным пренебречь векторным потенциалом в уравнении (5.37) для ионов (но не для электронов). Это можно сделать, поскольку величина  $\frac{e}{c}\eta$  имеет один порядок с  $mv_y$  (электроны), но остается малой по сравнению с  $Mv_y$  (ионы). Тогда, если опустить  $\eta$  в выражении для ионов, общее решение для них будет

$$f_+ = f \left( \frac{1}{2} M [v_x^2 + v_y^2] + e\phi, v_y \right) \quad (5.38)$$

или, что то же самое

$$f_+ = f \left( \frac{1}{2} Mv_x^2 + e\phi, v_y \right). \quad (5.39)$$

Как и в § 5.3, пренебрежем действием магнитного поля на ионы и будем считать равными плотности электронов  $N_-(x)$  и ионов  $N_+(x)$ . Иначе, будем учитывать только уравнение (5.17), пренебрегая уравнением Пуассона. Оправдание этого, как и ранее, заключается в том, что разность между  $N_+$  и  $N_-$ , необходимая для образования достаточных электрических полей, весьма мала по сравнению с  $N_+$  или  $N_-$ .

## § 5.6. Рассмотрение случая нормального к границе движения частиц с помощью уравнения Лиувилля

Рассмотрим еще раз случай нормального к границе движения частиц, но с помощью уравнения Лиувилля. Первая задача сводится к отысканию функций распреде-

ления для электронов и ионов, соответствующих данному случаю. Это можно сделать, взяв функции распределения в виде (5.33) и (5.39), причем в глубине объема плазмы, где  $\varphi$  и  $\eta$  равны нулю, они должны иметь правильный асимптотический вид, т. е.

$$f_{\pm} \rightarrow N_0 v_0 \delta(v_x^2 - v_0^2) \delta(v_y). \quad (5.40)$$

Эта функция описывает потоки частиц, движущиеся в обоих направлениях ( $v_x = \pm v_0$ ) вдоль оси  $x$ , и интегрирование ее по  $v_x$  и  $v_y$  дает плотность  $N_0$ .

Для ионов функция распределения вида (5.39), имеющая асимптотическую форму (5.40), есть, очевидно,

$$f_+ = N_0 v_0 \delta \left[ v_x^2 + \frac{2e}{M} \varphi - v_0^2 \right] \delta(v_y). \quad (5.41)$$

Действительно, при  $\varphi = 0$  она совпадает с уравнением (5.40). Плотность ионов, которая получается интегрированием по  $v_x$  и  $v_y$ , равна

$$\begin{aligned} N_+ &= \int f_+ dv_x dv_y = N_0 v_0 \int \frac{\delta \left[ v_x^2 + \frac{2e}{M} \varphi(x) - v_0^2 \right]}{v_x} v_x dv_x = \\ &= \frac{N_0 v_0}{v_x(\varphi)} = \frac{N_0 v_0}{\sqrt{v_0^2 - 2e\varphi(x)/M}}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Это уравнение, как легко видеть, совпадает с уравнением непрерывности для ионов (5.18).

Для электронов функция распределения типа (5.33), имеющая асимптотический вид (5.40), есть

$$f_- = N_0 v_0 \delta \left[ v_x^2 + v_y^2 - \frac{2e}{m} \varphi(x) - v_0^2 \right] \delta \left[ v_y - \frac{e}{mc} \eta(x) \right]. \quad (5.43)$$

Заряд электрона обозначим ( $-e$ ), так что теперь  $e$  положительная величина как для ионов, так и для электронов. Интегрируя по  $v_x$  и  $v_y$ , находим

$$N_- = \int f_- dv_x dv_y = \frac{N_0 v_0}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2e}{m} \varphi - \left( \frac{e\eta}{mc} \right)^2}}. \quad (5.44)$$

Согласно сделанному в предыдущем параграфе предположению, приравняем теперь  $N_+$  и  $N_-$ . Пренебрегая  $1/M$  по сравнению с  $1/m$ , находим

$$e\varphi \approx \frac{m}{2} \left( \frac{e\eta}{mc} \right)^2. \quad (5.45)$$

Поэтому

$$N_- = N_+ = \frac{N_0 v_0}{\sqrt{v_0^2 - \frac{m}{M} \left( \frac{e\eta}{mc} \right)^2}}.$$

Плотность тока в направлении оси  $y$  равна

$$\begin{aligned} j_y &= \frac{-N_- e v_y(x)}{c} = -\frac{N_- e}{c} \frac{e\eta(x)}{mc} = \\ &= -\frac{N_0 e^2}{mc^2} \frac{\eta}{\sqrt{1 - \frac{m}{M} \left( \frac{e\eta}{mc v_0} \right)^2}}. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в уравнение для поля, имеем

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{B^2}{8\pi} \right) = \frac{N_0 e^2}{mc^2} \frac{\eta}{\sqrt{1 - \frac{m}{M} \left( \frac{e\eta}{m v_0 c} \right)^2}}. \quad (5.46)$$

Последнее равенство тождественно тому, из которого непосредственно выведено уравнение (5.8) в § 5.2; отличается оно тем, что вместо  $v_0$  в нем фигурирует  $v_0 \sqrt{M/m}$ . Но в § 5.3 было показано, что подобное изменение необходимо для распространения результата задачи для частиц с равными массами на случай реальных масс. Таким образом, получен тот же результат, что и в § 5.3.

### § 5.7. Задача с изотропным распределением скоростей в плазме

Казалось бы, что изложенная теория может быть обобщена на случай максвелловского распределения скоростей в объеме плазмы. Однако в этом случае решение обязательно содержит захваченные частицы. При этом невозможность избавиться от захваченных частиц связана скорее с изотропией распределения Максвелла, а не с его экспонен-

циальным характером. Проиллюстрируем это на примере изотропного распределения с фиксированной энергией. Положим функцию распределения в глубине объема плазмы равной

$$f_{\pm} \rightarrow \frac{N_0}{\pi} \delta(v_x^2 + v_y^2 - v_{\pm}^2), \quad (5.47)$$

где  $v_{\pm}$  — скорость в глубине объема плазмы.

Выберем значения  $v_{\pm}$  различными для ионов и электронов, но такими, что их энергии будут равны. (В случае, если импульсы ионов и электронов равны, их орбиты оказываются одинаковыми, и поэтому нет разделения зарядов. Такая задача легко решается, но представляет мало интереса.)

Для ионов распределение типа (5.38) должно иметь вид

$$f_+ = \begin{cases} 0 & \text{при } |v_y| > |v_+|, \\ \frac{N_0}{\pi} \delta\left[v_x^2 + v_y^2 + 2\frac{e}{M}\varphi - v_+^2\right] & \text{при других значениях } v_y. \end{cases} \quad (5.48)$$

Если  $\varphi = 0$  внутри объема плазмы, то можно ожидать, что в граничном слое  $\varphi$  примет положительное значение, поскольку только в этом случае ионы, влетающие в граничный слой, могут от него отразиться (действием магнитного поля на ионы пренебрегаем). Если потенциал  $\varphi$  положителен, то, интегрируя функцию распределения (5.48), получаем плотность ионов:

$$\left. \begin{aligned} N_+ &= N_0 & \text{для } e\varphi < \frac{1}{2} Mv_+^2; \\ N_+ &= 0 & \text{для } e\varphi > \frac{1}{2} Mv_+^2, \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

т. е. плотность ионов  $N_+$  является величиной постоянной до некоторой точки, после которой она обращается в нуль.

Функция распределения типа (5.33) для электронов, принимающая в глубине объема вид (5.47), будет

$$f_- = \frac{N_0}{\pi} \delta\left[v_x^2 + v_y^2 - \frac{2e\varphi}{m} - v_-^2\right]. \quad (5.50)$$

В таком виде эта функция описывает и захваченные частицы. Чтобы исключить их из рассмотрения, отметим, что в на-

чальный момент (т. е. в глубине объема) скорость электронов ограничена следующим неравенством:

$$-v_- < v_y < v_+.$$

Так как  $v_y - \frac{e}{mc} \eta$  для всех частиц есть величина постоянная, то скорость каждого электрона, выходящего из объема плазмы, должна подчиняться неравенству

$$-v_- < v_y - \frac{e}{mc} \eta < +v_+. \quad (5.51)$$

Электроны с такими скоростями имеют возможность возвратиться обратно в объем плазмы. Таким образом, необходимо дополнительно потребовать, чтобы  $f_- = 0$  вне интервала, определенного неравенством (5.51). Отметим, что при этом  $f_-$  все еще имеет вид (5.33). Интегрируя по  $v_x$  и  $v_y$ , найдем плотность электронов:

$$N_- = \frac{N_0}{\pi} (\theta_2 - \theta_1), \quad (5.52)$$

где

$$\cos \theta_2 = \frac{-v_- + \frac{e}{mc} \eta}{\sqrt{v_-^2 + \frac{2e}{m} \varphi}}, \quad (5.53)$$

$$\cos \theta_1 = \frac{v_+ + \frac{e}{mc} \eta}{\sqrt{v_+^2 + \frac{2e}{m} \varphi}}. \quad (5.54)$$

Если  $\cos \theta_2$  становится меньше  $-1$ , положим  $\theta_2 = \pi$ , а при  $\cos \theta_1$  больше  $+1$ , нужно считать  $\theta_1 = 0$ . Если же выражения под корнем становятся отрицательными, то надо полагать  $N_- = 0$ .

Потребуем снова, чтобы  $N_+ = N_-$ , тогда

$$\theta_2 = \pi, \quad \theta_1 = 0. \quad (5.55)$$

Если  $\varphi > 0$ , то либо  $\theta_2 < \pi$ , согласно выражению (5.53) ( $\eta \geq 0$ ), либо  $\theta_1 > 0$ , согласно выражению (5.54) ( $\eta < 0$ ). Поэтому для  $\varphi > 0$  невозможно удовлетворить уравнению (5.55).

Указанная трудность заключается в том, что плотность ионов остается постоянной до точки, где  $e\varphi > \frac{1}{2}Mv_+^2$ , тогда как плотность электронов уменьшается с увеличением  $\varphi$ . Можно заметить, эта трудность сохраняется и в том случае, если вместо приближенного равенства  $N_+ = N_-$  воспользуемся точным уравнением Пуассона:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -4\pi\rho.$$

Действительно, в соответствии с высказанными ранее соображениями область пограничного слоя, прилегающая к объему плазмы, имеет положительный заряд. Поэтому, согласно уравнению Пуассона, потенциал  $\varphi$  должен становиться отрицательным вопреки предположению.

Можно было бы предположить существование решения, при котором потенциал сначала становится отрицательным, заставляя часть электронов испытать отражение, а затем — положительным, отражающим ионы. Однако это предположение также не оправдывается, по крайней мере для случая, когда  $N_+ = N_-$ .

Физический смысл кажущегося противоречия состоит в том, что нельзя не учитывать захваченные электроны. При изотропном распределении по скоростям часть электронов, пересекающих границу слоя под малыми углами, может быть легко захвачена в слое. Когда слой уже сформировался, для этого оказывается достаточно ничтожных динамических воздействий.

Если же предположить наличие захваченных электронов, то можно представить себе различные способы формирования граничного слоя. Одним из путей его образования может быть повышение электронной плотности, определяемой выражениями (5.50) и (5.51) настолько, чтобы сделать ее равной  $N_+$ . Можно для простоты считать, что скорость этих дополнительных электронов направлена вдоль оси  $y$ . Это допустимо в том случае, когда ее величина обеспечивает компенсацию действия электрического и магнитного поля, т. е.  $v_g = c\frac{E}{B}$  в каждой точке. Соотношение  $\varphi$  и  $\eta$  при этом может сохраняться произвольным. Установив его некоторым образом, можно выразить плотность тока в направлении оси  $y$  —  $j_y$  как функцию от  $\eta$ .

Из первого уравнения Максвелла

$$\frac{d}{d\eta} \left( \frac{B^2}{8\pi} \right) = -j_y$$

можно тогда найти  $B$  как функцию от  $\eta$ . И окончательно соотношение между  $\eta$  и  $x$  может быть определено из уравнения (5.5). Однако рассматривать эту модель слоя детально не имеет смысла, поскольку она далеко не единственно возможная и вряд ли соответствует действительности.

### § 5.8. Метод построения общего решения для плоского случая

Теперь можно рассмотреть способ построения общего решения статического уравнения Лиувилля и уравнений Максвелла для задач с плоской геометрией, не делая каких-либо приближений.

Во-первых, следует выбрать функции распределения для электронов и ионов:

$$\left. \begin{aligned} f_+ &= f_+ \left[ v_x^2 + v_y^2 + \frac{2e}{M} \varphi, v_y + \frac{e}{Mc} \eta \right]; \\ f_- &= f_- \left[ v_x^2 + v_y^2 - \frac{2e}{m} \varphi, v_y - \frac{e}{mc} \eta \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5.56)$$

Эти функции могут пока считаться произвольными, лишь бы они зависели от указанных комбинаций переменных. Определим заряд и плотность тока:

$$\rho(\eta, \varphi) = e \int (f_+ - f_-) dv_x dv_y; \quad (5.57)$$

$$j_y(\eta, \varphi) = \frac{e}{c} \int v_y (f_+ - f_-) dv_x dv_y. \quad (5.58)$$

Подставим эти значения в уравнения Максвелла:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -4\pi\rho(\varphi, \eta); \quad (5.59)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = -4\pi j_y(\varphi, \eta). \quad (5.60)$$

Эти уравнения должны быть совместно проинтегрированы для получения  $\varphi(x)$  и  $\eta(x)$ . Отсюда можно найти  $E_x$  и  $B_z$ :

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad B_z = \frac{\partial\eta}{\partial x}. \quad (5.61)$$

На практике трудность этого метода заключается в том, что удовлетворить граничным условиям для  $\eta$  и  $\varphi$  можно только путем случайного подбора вида функций. В частности, весьма трудно подобрать  $f_+$  и  $f_-$  таким образом, чтобы обеспечить квазинейтральность, необходимую для избежания слишком больших электрических полей.

### § 5.9. Общее решение для случая осевой симметрии

Метод построения общего решения для плоского случая может быть распространен и на осесимметричную задачу, в которой электрическое поле направлено по радиусу, магнитное — по оси  $z$  и по азимуту  $\theta$ , а все остальные величины зависят только от радиуса. Выберем правую систему цилиндрических координат  $r, \theta, z$ , и пусть  $\varphi(r)$  — потенциал электрического поля, а  $\eta_\theta(r)$  и  $\eta_z(r)$  — компоненты векторного потенциала. Тогда

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}; \quad B_\theta = -\frac{\partial\eta_z}{\partial r}; \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\eta_\theta). \quad (5.62)$$

Гамильтониан для иона в этих полях запишется следующим образом:

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2M} P_r^2 + \frac{1}{2Mr^2} \left( P_\theta - \frac{e}{c} r\eta_\theta \right)^2 + \frac{1}{2M} \left( P_z - \frac{e}{c} \eta_z \right)^2 + e\varphi, \quad (5.63)$$

где импульсы равны

$$P_r = Mv_r; \quad P_\theta = Mrv_\theta + \frac{e}{c} r\eta_\theta; \quad P_z = Mv_z + \frac{e}{c} \eta_z. \quad (5.64)$$

Здесь  $v_r, v_\theta$  и  $v_z$  — компоненты вектора скорости. Интегралами движения будут: энергия

$$W = \frac{1}{2} M (v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2) + e\varphi \quad (5.65)$$



и импульсы

$$P_\theta \text{ и } P_z.$$

Функция распределения для ионов тогда является произвольной функцией от этих аргументов

$$f_+ = f_+(W, P_\theta, P_z), \quad (5.66)$$

и функция распределения для электронов отличается от нее только заменой  $M$  на  $m$  и  $e$  на  $-e$ . Теперь можно вычислить плотность заряда и токов:

$$\rho(r, \varphi, \eta_\theta, \eta_z) = e \int (f_+ - f_-) dv_r dv_\theta dv_z, \quad (5.67)$$

$$j_\theta(r, \varphi, \eta_\theta, \eta_z) = \frac{e}{c} \int v_\theta (f_+ - f_-) dv_r dv_\theta dv_z, \quad (5.68)$$

$$j_z(r, \varphi, \eta_\theta, \eta_z) = \frac{e}{c} \int v_z (f_+ - f_-) dv_r dv_\theta dv_z. \quad (5.69)$$

Уравнения Максвелла в этом случае имеют вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = -4\pi\rho(r, \varphi, \eta_\theta, \eta_z), \quad (5.70)$$

$$-\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\eta_\theta) \right) = 4\pi j_\theta(r, \varphi, \eta_\theta, \eta_z), \quad (5.71)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \eta_z}{\partial r} \right) = 4\pi j_z(r, \varphi, \eta_\theta, \eta_z). \quad (5.72)$$

Эти уравнения должны быть проинтегрированы совместно для получения  $\varphi, \eta_\theta$  и  $\eta_z$  как функции радиуса  $r$ .

### § 5.10. Осесимметричная задача для случая частиц равных масс

Для иллюстрации изложенного метода рассмотрим осесимметричную задачу, в которой массы положительных и отрицательных частиц предполагаются равными. При равных массах трудности, возникающие из-за разделения зарядов и больших электрических полей, отсутствуют. При этом можно считать плазму полностью нейтральной и положить  $\varphi = 0$ . Для еще большего упрощения будем считать, что функция распределения зависит от  $W$  и  $P_z$  и содержит только дельта-функции:

$$f_\pm = \frac{N_0}{2\pi} \delta [v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2 - V^2] \delta \left[ v_z + \frac{e}{mc} \eta_z \right]. \quad (5.73)$$

В уравнении (5.73) постоянная  $V$  обозначает величину полной скорости.

Плотность положительных частиц равна

$$\begin{aligned}
 N_+ &= \int f_+ dv_z dv_r dv_\theta = \frac{N_0}{2\pi} \int \delta \left[ v_r^2 + v_\theta^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{e r_{iz}}{mc} \right)^2 - V^2 \right] dv_r dv_\theta = \\
 &= \begin{cases} \frac{N_0}{2} & \text{при } |\eta_z| < \frac{mcV}{e}, \\ 0 & \text{при } |\eta_z| > \frac{mcV}{e}. \end{cases} \quad (5.74)
 \end{aligned}$$

Функцию распределения  $f_-$  будем считать равной  $f_+$ , за исключением замены  $e$  на  $(-e)$ . При этом  $N_+ = N_-$  и плазма полностью нейтральна.

Единственной необращающейся в нуль компонентой плотности тока является  $j_z$ . Ток, создаваемый положительными частицами, можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 j_{z+} &= \frac{e}{c} \int v_z f_+ dv_z dv_r dv_\theta = \\
 &= \begin{cases} - \left( \frac{N_0 e^2}{2mc^2} \right) \eta_z & \text{при } |\eta_z| < \frac{mcV}{e}, \\ 0 & \text{при } |\eta_z| > \frac{mcV}{e}. \end{cases} \quad (5.75)
 \end{aligned}$$

Ток отрицательных частиц равен току, создаваемому положительными частицами.

Остается только найти зависимость  $\eta_z$  от  $r$  из уравнения (5.72). Предположим, что вблизи оси величина  $\eta_z$  положительна и меньше, чем  $\frac{mcV}{e}$ . Тогда в этой области

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \eta_z}{\partial r} = \frac{4\pi N_0 e^2}{mc^2} \eta_z. \quad (5.76)$$

Решением этого уравнения является Бесселева функция от мнимого аргумента

$$\eta_z = A J_0(i\alpha r), \quad (5.77)$$

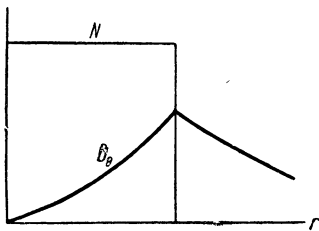


Рис. 5.3. Зависимость плотности частиц и магнитного поля в осесимметричном случае.

с радиусом. При некотором значении  $r$   $\eta_z$  становится равным  $mcV/e$ . Для больших значений радиуса плотность заряда и тока обращается в нуль, а магнитное поле спадает как  $1/r$ . Зависимости плотности заряда и магнитного поля  $B_\theta$  изображены на рис. 5.3.

где  $A$  — произвольная положительная постоянная, меньшая, чем  $mcV/e$ , и

$$\alpha = \left( \frac{4\pi N_0 e^2}{mc^2} \right)^{1/2}. \quad (5.78)$$

Магнитное поле для этой области

$$B_\theta = - \frac{\partial \eta_z}{\partial r} = i\alpha A J_1(i\alpha r)$$

обращается в нуль на оси и

растет почти экспоненциально

# Г Л А В А 6

## ВОЛНЫ МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ В ПЛАЗМЕ

### § 6.1. Введение

В этой главе рассмотрим поведение малых возмущений в стационарной однородной плазме. Преимущество рассмотрения только малых возмущений заключается в том, что при этом уравнения становятся линейными. Сумма двух решений таких уравнений также является их решением. Поэтому можно, в частности, представить общее решение в виде ряда Фурье по плоским волнам. Отдельные плоские волны могут быть рассмотрены с большей простотой и физической ясностью, чем полное общее решение.

По ходу изложения будет показано, что уравнения допускают решения в виде плоских волн, дающие нам сведения о поляризации волн (продольные, поперечные или с круговой поляризацией), а также приводят к дисперсионному соотношению, связывающему частоту и волновой вектор. Дисперсионное соотношение содержит в себе решение задачи Коши для линейных уравнений плазмы. Если начальное возмущение разложить на плоские волны, то последующее движение плазмы можно найти как совокупность плоских волн со свойственными им характеристическими частотами.

### § 6.2. Случай отсутствия магнитного поля

Рассмотрим задачу без внешнего магнитного или электрического поля. С волной, естественно, связано ее собственное магнитное поле. Однако, поскольку действие магнитного поля на частицу намного меньше действия электрических сил, пока ее скорость меньше скорости света,

им можно пренебрегать. Это утверждение справедливо, пока (так же как в вакууме) электрическое поле по порядку величины равно магнитному (в гауссах). В дальнейшем укажем критерий безопасного пренебрежения магнитным полем.

Пусть электрическое поле мало и равно

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{E}_1 \exp \{i[(\mathbf{k}\mathbf{R}) - \omega t]\}, \quad (6.1)$$

где  $\mathbf{k}$  — волновой вектор,  $\omega$  — угловая частота волны, а постоянный вектор  $\mathbf{E}_1$  определяет амплитуду и поляризацию волны.

В невозмущенной плазме, т. е. в отсутствие любых волн, радиус-вектор частицы равен

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{v}_0 t, \quad (6.2)$$

где  $\mathbf{R}_0$  и  $\mathbf{v}_0$  — ее начальное положение и скорость. Под действием волны координата частицы будет несколько меняться:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}, \quad (6.3)$$

где  $\mathbf{r}$ , как и  $\mathbf{E}$ , — величина первого порядка малости. Уравнение движения частицы гласит:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}_1 \exp \{i(\mathbf{k}[\mathbf{R}_0 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}] - i\omega t)\}. \quad (6.4)$$

Это уравнение, как видно, нелинейно по  $\mathbf{r}$ , однако в первом приближении можно опустить зависимость от  $\mathbf{r}$  в экспоненте. Тогда уравнение движения примет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}_1 \exp \{i(\mathbf{k}\mathbf{R}_0) - i[\omega - (\mathbf{k}\mathbf{v}_0)] t\}. \quad (6.5)$$

Член  $(\mathbf{k}\mathbf{R}_0)$  определяет фазу, а член  $(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0)$  — частоту, сдвинутую в соответствии с эффектом Допплера для движущейся частицы.

Стационарное решение уравнения (6.5) имеет вид

$$\mathbf{r} = -\frac{e}{m} [\omega - (\mathbf{k}\mathbf{v}_0)]^{-2} \mathbf{E}(\mathbf{R}_1, t), \quad (6.6)$$

где  $\mathbf{R}_1$  — радиус-вектор частицы в отсутствие волны, равный

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_0 + \mathbf{v}_0 t. \quad (6.7)$$

Уравнение (6.5) является удовлетворительным приближением к уравнению (6.4) при условии

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \ll 1. \quad (6.8)$$

В соответствии с равенством (6.6) это условие будет автоматически выполняться для случая  $(\mathbf{k}\mathbf{E}) = 0$ , т. е. для поперечных волн. В противном случае поле  $\mathbf{E}$  должно быть малым. Однако даже для бесконечно малых амплитуд  $\mathbf{E}$  приближение оказывается несправедливым при  $\omega = (\mathbf{k}\mathbf{v}_0)$ , т. е. тогда, когда присутствуют частицы со скоростью  $\mathbf{v}_0$ , равной фазовой скорости волны  $\omega/k$ . Для подобных волн оказывается незаконным пренебрегать нестационарной частью решения уравнения (6.5).

Чем ближе к резонансным значениям скорости частиц, тем больше требуется времени, чтобы амплитуда их колебаний заметно увеличилась. Поэтому для конечных промежутков времени практически не успеют появиться частицы с бесконечной амплитудой колебаний. Нестационарная часть решения уравнения (6.5) ответственна за явление, известное под названием затухание Ландау, о котором будет говориться дальше. Сейчас же для упрощения предположим, что в плазме нет частиц, движущихся с фазовой скоростью волны, а скорость частиц много меньше фазовой скорости волны.

Определим теперь плотность тока в плазме. Скорость частицы

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \frac{i\mathbf{e}}{m [\omega - (\mathbf{k}\mathbf{v}_0)]} \mathbf{E}(\mathbf{R}_1, t). \quad (6.9)$$

Ток, соответствующий одной такой частице, выражается через дельта-функцию от аргумента  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{r}$ . Полная плотность тока получается суммированием по всем частицам. Если в отсутствие всяких возмущений распределение по скоростям задается функцией  $f(\mathbf{v}_0)$ , не зависящей от  $\mathbf{R}_1$ , полная плотность тока будет

$$\mathbf{j}(\mathbf{R}) = \frac{e}{c} \int \mathbf{v} \delta[\mathbf{R} - \mathbf{R}_1 - \mathbf{r}(\mathbf{R}_1)] f(\mathbf{v}_0) d\mathbf{v} d\mathbf{R}_1. \quad (6.10)$$

Выполним сначала интегрирование по  $\mathbf{R}_1$ . Поскольку в аргументе дельта-функции  $\mathbf{r}$  зависит от  $\mathbf{R}$ , используем  $\mathbf{R}_1 + \mathbf{r}(\mathbf{R}_1)$  как новую переменную интегрирования. Яко-

биан преобразования к новым переменным с точностью до величин первого порядка равен

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\mathbf{R}_1 + \mathbf{r}(\mathbf{R}_1)]}{\partial \mathbf{R}_1} &= \text{Det} \left[ \delta_{ij} + \left( \frac{\partial r_i}{\partial R_j} \right) \right] = 1 + \left( \frac{\partial r_i}{\partial R_i} \right) = \\ &= 1 + i(\mathbf{k}\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Выражение (6.10) для тока тогда можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{R}) &= \frac{e}{c} \int \frac{\mathbf{v}f(\mathbf{v}_0) d\mathbf{v}_0}{1 + i(\mathbf{k}\mathbf{r})} = \\ &= \frac{e}{c} \int \left[ \mathbf{v}_0 + \frac{i\mathbf{e}\mathbf{E}}{m[\omega - (\mathbf{k}\mathbf{v}_0)]} \right] \left\{ 1 - \frac{i\mathbf{e}(\mathbf{k}\mathbf{E})}{m[\omega - (\mathbf{k}\mathbf{v}_0)]^2} \right\}^{-1} f(\mathbf{v}_0) d\mathbf{v}_0. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Вычислим этот интеграл с точностью до первого порядка по  $\mathbf{E}$  и до второго порядка по отношению  $v_0$  к фазовой скорости волны. Члены первого порядка по  $v_0$  исчезают, поскольку функция распределения предполагается симметричной, т. е.  $f(\mathbf{v}_0) = f(-\mathbf{v}_0)$ . Разлагая знаменатели в ряд и производя несложные алгебраические преобразования, находим

$$\mathbf{j}(\mathbf{R}) = \frac{iNe^2}{mc\omega} \left\{ \mathbf{E} + \frac{k^2}{\omega^2} \overline{v_k^2} \left[ \mathbf{E} + \frac{2(\mathbf{k}\mathbf{E})}{k^2} \mathbf{k} \right] \right\}. \quad (6.13)$$

В этом выражении  $N$  — пространственная плотность частиц, а

$$\overline{v_k^2} = \frac{1}{k^2 N} \int (\mathbf{k}\mathbf{v}_0)^2 f(\mathbf{v}_0) d\mathbf{v}_0 \quad (6.14)$$

есть среднеквадратичная скорость в направлении волнового вектора. Отметим, что второй член в квадратных скобках уравнения (6.13) исчезает, если поле  $\mathbf{E}$  поперечное.

Строго говоря, нам следует сложить токи ионов и электронов. Однако поскольку вклад частиц в ток обратно пропорционален их массам, можно пренебречь учетом ионов и считать  $m$  в выражении (6.13) массой электрона.

Подставим выражение для плотности тока (6.13) в уравнение Максвелла. Предположим, что  $\mathbf{B}$  имеет вид

$$\mathbf{B}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{B}_1 \exp \{ i [(\mathbf{k}\mathbf{R}) - \omega t] \}. \quad (6.15)$$

Из уравнения  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  следует, что

$$(\mathbf{k} \mathbf{B}_1) = 0, \quad (6.16)$$

т. е. магнитное поле всегда перпендикулярно направлению распространения волны (это справедливо для любых электромагнитных волн).

Уравнение Максвелла (1.4) при таких условиях приобретает вид

$$[\mathbf{k}\mathbf{B}_1] = -\frac{\omega}{c} \left[ \varepsilon_1 \mathbf{E}_1 + \varepsilon_2 \frac{(\mathbf{k}\mathbf{E}_1)}{k^2} \mathbf{k} \right]. \quad (6.17)$$

В уравнении (6.17) были введены две диэлектрические постоянные:

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{4\pi N e^2}{m\omega^2} \left( 1 + \frac{k^2}{\omega^2} \overline{v_k^2} \right); \quad (6.18)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{-4\pi N e^2}{m\omega^2} \left( 2 \frac{k^2}{\omega^2} \overline{v_k^2} \right). \quad (6.19)$$

Левая часть уравнения (6.17) нормальна к  $\mathbf{k}$ , относительно же правой части это не очевидно. Умножив обе части уравнения (6.17) скалярно на  $\mathbf{k}$ , получим

$$\varepsilon_1(\mathbf{k}, \mathbf{E}_1) + \varepsilon_2(\mathbf{k}, \mathbf{E}_1) = 0. \quad (6.20)$$

Из этого равенства следует, что либо  $(\mathbf{k}\mathbf{E}_1) = 0$ , т. е. поле поперечное, либо  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$ . Исследуем эти случаи подробнее.

#### Поле $\mathbf{E}_1$ — поперечное

Согласно уравнению (1.1), для этого случая выражение  $\nabla \mathbf{E} = i(\mathbf{k}\mathbf{E}) = 0$  равносильно равенству нулю плотности заряда в волне. Действительно, поскольку движение частиц под влиянием поля волны происходит в плоскостях, перпендикулярных  $\mathbf{k}$ , оно не должно приводить к образованию сгущений зарядов разного знака. Возможность получения этого результата двумя способами связана с тем, что, как отмечено в § 1.2, уравнения Максвелла неявно включают требование сохранения заряда.

Уравнение (1.2) для рассматриваемого случая приобретает вид

$$[\mathbf{k}\mathbf{E}_1] = \frac{\omega}{c} \mathbf{B}_1. \quad (6.21)$$



Подставив выражение для  $\mathbf{B}_1$  в уравнение (6.17), найдем

$$k^2 \mathbf{E}_1 = \varepsilon_1 \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \mathbf{E}_1.$$

Таким образом, условие существования плоских волн гласит:

$$k^2 = \varepsilon_1 \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (6.22)$$

Подставив в это условие выражение (6.18) для  $\varepsilon_1$ , получим окончательно

$$k = \frac{1}{c} \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\sqrt{1 + \frac{v_k^2}{c^2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}, \quad (6.23)$$

где  $\omega_p$  — плазменная частота, равная

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi N e^2}{m}} \approx 5,6 \cdot 10^4 \sqrt{N}. \quad (6.24)$$

( $N$  — количество электронов в  $1 \text{ см}^3$ ).

Дисперсионное соотношение (6.23) связывает  $k$  и  $\omega$ . Отметим, что если  $\omega > \omega_p$ , то  $k$  действительно, что соответствует распространяющейся волне. Если же  $\omega < \omega_p$ ,  $k$  становится чисто мнимым, и решение для волны имеет вид

$$\exp[\pm |k x|] \exp(-i \omega t).$$

Однако в этом случае неправильно утверждать, что волна затухает, поскольку энергия нигде не поглощается. Действительно, из уравнения (6.21) следует, что когда  $k$  имеет мнимое значение, то поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  сдвинуты по фазе на  $90^\circ$ , и суммарный поток вектора Пойнтинга равен нулю. Если электромагнитная волна с частотой  $\omega < \omega_p$  падает на слой плазмы толщиной  $D$ , такой, что  $|k|D \gg 1$ , то эта волна полностью отражается без потери энергии. Если же слой имеет толщину  $|k|D \approx 1$  или меньше, то волна частично проходит через слой.

В том случае, когда  $\omega \ll \omega_p$ , но

$$\frac{v_k^2}{c^2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \ll 1, \quad (6.25)$$

будет справедливо соотношение

$$k \approx i \frac{\omega_p}{c}. \quad (6.26)$$

Толщина слоя, для которого  $|k|D = 1$ , равна

$$D = \frac{1}{|k|} = \frac{0,53 \cdot 10^6}{\sqrt{N}} \text{ см.} \quad (6.27)$$

Например, для электронной плотности  $10^{14}$  эта толщина составляет 0,5 мм.

Когда  $\omega$  настолько меньше  $\omega_p$ , что соотношение (6.25) перестает быть справедливым, то  $k \approx \omega / \sqrt{v_k^2}$ . Однако в этом случае разложение интеграла (6.12) перестает также быть справедливым.

Когда  $k$  полностью мнимая величина, подынтегральное выражение не содержит особенностей. Интеграл можно вычислить заново, предполагая

$$\omega \ll |k| \sqrt{v_k^2}.$$

В результате получим

$$k \approx i \left[ \frac{\omega_p^2 \omega}{c^2 \sqrt{v_k^2}} \right]^{1/3}. \quad (6.28)$$

В этом соотношении опущен множитель порядка единицы. Выведенное соотношение указывает, что глубина проникновения волны увеличивается, когда  $\omega$  становится меньше значения, обращающего левую часть неравенства (6.25) в единицу.

Явление полного отражения хорошо известно в физике ионосферы. Кроме того, дисперсионное соотношение (6.23) использовалось для измерения плотности электронов в плазменных установках путем измерения сдвига фазы в пучке СВЧ-радиоволн, проходящих через плазму.

В большинстве приложений член  $\sqrt{1 + \frac{v_k^2 \omega_p^2}{c^2 \omega^2}}$  может быть заменен единицей

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0.$$

В соответствии с определением  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  имеем

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[ 1 + 3 \frac{k^2 \overline{v_k^2}}{\omega^2} \right] = 0$$

или

$$\frac{\omega^2}{\omega_p^2} = 1 + 3 \frac{k^2 \overline{v_k^2}}{\omega^2}.$$

Это уравнение четвертой степени по  $\omega$ , однако, поскольку его последний член справа считался малым при разложении подынтегрального выражения в формуле (6.12), полученное уравнение можно решать методом последовательных приближений. В первом приближении, очевидно, имеем  $\omega = \omega_p$ . Следующее приближение дает

$$\omega^2 = \omega_p^2 + 3k^2 \overline{v_k^2}. \quad (6.29)$$

Это и есть дисперсионное соотношение. Прежде чем анализировать его в деталях, посмотрим, какие требования накладываются на поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{V}$  уравнениями Максвелла в этом случае.

Та часть уравнения (6.17), которая параллельна  $\mathbf{k}$ , уже была сведена к соотношению (6.20). Таким образом, остается только рассмотреть часть, перпендикулярную  $\mathbf{k}$ . Для этого умножим уравнение (6.17) векторно на  $\mathbf{k}$  и получим

$$-k^2 \mathbf{V}_1 = -\frac{\omega}{c} \varepsilon_1 [\mathbf{kE}_1].$$

Уравнение (1.2) приобретает вид

$$[\mathbf{kE}_1] = \frac{\omega}{c} \mathbf{V}_1. \quad (6.30)$$

Это уравнение всегда справедливо. Комбинируя последние два уравнения, находим

$$k^2 \mathbf{V}_1 = \frac{\omega^2}{c} \varepsilon_1 \mathbf{V}_1.$$

Отсюда следует, что либо  $\mathbf{V}_1$  обращается в нуль, либо

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = \varepsilon_1 = -\varepsilon_2. \quad (6.31)$$

Эти уравнения не имеют решений, совместимых со сделанными ранее предположениями. Поэтому магнитное поле волны  $\mathbf{B}_1$  должно обращаться в нуль. Тогда из уравнения (6.30) следует, что  $\mathbf{E}_1$  должно быть параллельно  $\mathbf{k}$ , т. е. поле  $\mathbf{E}$  — продольное. Таким образом,  $\nabla E = i(kE)$  не равно нулю и, следовательно, с волной связана некоторая плотность заряда.

Возвращаясь к дисперсионному соотношению (6.29), можно заметить, что если в плазме отсутствует тепловая энергия, т. е.  $\overline{v_k^2} = 0$ , то частота волны всегда равна  $\omega_p$  независимо от длины волны. Поэтому компоненты Фурье любого возмущения имеют одну и ту же частоту. Таким образом, если  $\overline{v_k^2} = 0$ , то можно утверждать, что произвольное возмущение не распространяется в плазме, а осциллирует, оставаясь на месте. Этот вывод может быть получен и из выражения для групповой скорости:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = 3 \frac{k}{\omega} \overline{v_k^2}, \quad (6.32)$$

которое обращается в нуль при  $\overline{v_k^2} = 0$ .

Механизм указанных колебаний крайне прост. Если в некоторой области имеется избыток электронов, то электростатические силы стремятся оттолкнуть их друг от друга. Эти силы, действуя против инерции электронов, приводят к колебаниям с частотой  $\omega_p$ . Член  $3k^2 \overline{v_k^2}$  в уравнении (6.29) обусловлен дополнительной возвратной силой, связанной с давлением, которое в свою очередь обязано наличию теплового разброса по скоростям.

Частота  $\omega_p$  достаточно велика даже в плазме невысокой плотности. Так, согласно уравнению (6.24), при  $N = 10^{14}$   $\omega_p = 5,6 \cdot 10^{11}$ . Такая частота соответствует длине волны около 3 мм в вакууме. Возможно, что указанные колебания плазмы могут быть использованы для генерирования когерентных волн. Этому, однако, может помешать отсутствие у таких колебаний магнитного поля и, следовательно, равенство нулю потока излучаемой энергии. Поэтому может оказаться трудным отбирать энергию от таких колебаний.

Когда электронная плотность достигает значений, характеризующих, например, плотность свободных электронов в металлах, то частота плазменных колебаний становится настолько высокой, что могут стать заметными квантовые эффекты. Если предположить, что на один атом приходит-

ся один свободный электрон, то средняя плотность электронов в металле будет порядка  $6 \cdot 10^{22}$ , а соответствующая частота  $\omega_p \approx 1,3 \cdot 10^{16}$ . Энергия кванта такой частоты составляет около  $10 \text{ эв}$ . При пропускании пучков электронов через тонкую металлическую фольгу наблюдались дискретные потери энергии, величина которых примерно равнялась указанной энергии квантов\*.

Колебания описанного типа будем называть колебаниями электронной плазмы. Они впервые были описаны Ленгмюром и Тонксом в 1929 г.

### § 6.3. Доказательство законности пренебрежения действием магнитного поля

Мы пренебрегали действием собственного магнитного поля волны на частицу по сравнению с действием на нее электрического поля. Это предположение оправдано в том случае, когда

$$\frac{v}{c} B_1 \ll E_1. \quad (6.33)$$

Согласно уравнению (6.30), которое справедливо всегда, это условие эквивалентно следующему:

$$\frac{kv}{\omega} E_1 \ll E_1, \text{ т. е. } \frac{kv}{\omega} \ll 1. \quad (6.34)$$

Если скорость частицы  $v_0$  определяется в основном ее тепловой скоростью, то это условие означает, что последняя должна быть мала по сравнению с фазовой скоростью волны  $\omega/k$ . Но такое предположение уже использовалось. Если же  $v_0$  настолько мала, что основная часть скорости вызвана действием волны, то

$$v/\omega = r,$$

где  $r$  — смещение частицы, и условие приобретает вид  $kr \ll 1$ . Это условие было уже использовано в уравнении (6.8).

### § 6.4. Резонанс, или затухание, Ландау

В § 6.2 мы встретились с особенностью уравнений (6.6) и (6.9), описывающих движение частиц со скоростью,

\* A. Blackstock et al. Phys. Rev., 100, 1078 (1955).

равной фазовой скорости волны. В действительности никакая частица не может достигнуть бесконечной скорости или бесконечного смещения за конечное время. Отмеченное противоречие связано с тем, что мы ограничились только стационарной частью решения (6.5).

Рассмотрим теперь более тщательно движение частиц, для которых выполняются или почти выполняются условия резонанса. Предположим, что для  $t < 0$  электрическое поле равно нулю, а для  $t > 0$  оно описывается уравнением (6.1). Делая те же предположения, что и раньше, мы опять получим уравнение (6.5). Проинтегрируем это уравнение с учетом начальных условий:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \frac{ie E_1 \exp i(\mathbf{kR}_0)}{m [\omega - (\mathbf{k}\mathbf{v}_0)]} \exp \{-i[\omega - (\mathbf{k}\mathbf{v}_0)]t - 1\}. \quad (6.35)$$

При  $t = 0$  слагаемое, вызванное действием волны, обращается в нуль, и при всех значениях  $t$  и  $\mathbf{v}_0$  оно конечно. Подсчитаем кинетическую энергию частицы. Для этого необходимо взять реальную часть скорости (6.35):

$$\begin{aligned} v(t) = v_0 + \frac{e}{m} \frac{E_1}{[\omega - (\mathbf{k}\mathbf{v}_0)]} \{ -\sin \varphi_0 [\cos [\omega - (\mathbf{k}\mathbf{v}_0)]t - 1] + \\ + \cos \varphi_0 \sin [\omega - (\mathbf{k}\mathbf{v}_0)]t \}, \end{aligned} \quad (6.36)$$

где  $\varphi_0 = (\mathbf{kR}_0)$  — начальная фаза частицы. Различным частицам соответствуют различные значения фазы  $\varphi_0$ . Если частицы распределены в пространстве однородно, то и распределение фаз также однородно. При усреднении по начальным фазам член, содержащий произведение  $(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{E}_1)$ , выпадает из выражения для кинетической энергии. Поэтому в результате усреднения получим

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{e^2 E_1^2}{m [\omega - (\mathbf{k}\mathbf{v}_0)]^2} \sin^2 \frac{[\omega - (\mathbf{k}\mathbf{v}_0)]t}{2}. \quad (6.37)$$

Второй член справа описывает увеличение энергии частицы за счет волны. Он всегда конечен. Покажем, что если его проинтегрировать по скорости с учетом распределения по скоростям, то результат будет приблизительно линейно зави-

сеть от времени. Изменение кинетической энергии в единице объема

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{e^2 E_1^2}{m} \int f(v_0) \frac{\sin^2 [\omega - (k v_0)] \frac{t}{2}}{[\omega - (k v_0)]^2} dv_0 = \\ &= \frac{e^2 E_1^2}{m} \int f_1(v_k) \frac{\sin^2(\omega - k v_k) \frac{t}{2}}{(\omega - k v_k)^2} dv_k, \end{aligned} \quad (6.38)$$

где  $v_k$  — компонента скорости  $v_0$ , параллельная  $k$ , а  $f_1(v_k)$  описывает распределение по  $v_k$ , после того как по двум другим компонентам было произведено интегрирование.

График функции  $\frac{\sin^2 vt}{v^2}$  изображен на рис. 6.1. Наибольший вклад в интеграл дает область вокруг точки  $v = 0$ .

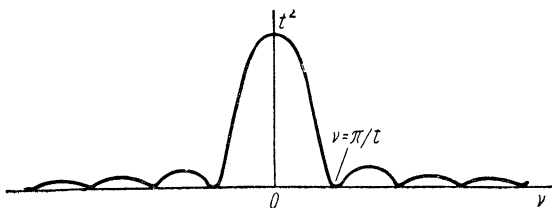


Рис. 6.1. График функции  $\frac{\sin^2 vt}{v^2}$ .

Размеры этой области уменьшаются со временем по закону  $1/t$ . Таким образом, для больших  $t$  значение интеграла (6.38) определяется значением подынтегрального выражения в точке  $v_k = \omega/k$ :

$$\begin{aligned} \Delta W &\rightarrow \frac{e^2 E_1^2}{m} f_1\left(\frac{\omega}{k}\right) \int \frac{\sin^2(\omega - v_k k) \frac{t}{2}}{(\omega - v_k k)^2} dv_k = \\ &= \frac{e^2 E_1^2}{m} f_1\left(\frac{\omega}{k}\right) \frac{t}{2k} \int \frac{\sin^2 u}{u^2} du. \end{aligned} \quad (6.38')$$

Поскольку определенный интеграл равен  $\pi$ , окончательно имеем

$$\Delta W = \frac{\pi e^2 E_1^2}{2mk} f_1\left(\frac{\omega}{k}\right) t. \quad (6.39)$$

Таким образом, частицы, находящиеся вблизи резонанса, получают от электрического поля в единицу времени количество энергии, пропорциональное  $E_1^2$ , что приводит к постоянному затуханию. Как видно из выражения (6.38'), с течением времени все более точно попадающие в резонанс частицы будут отбирать энергию от волны.

Так как размерность  $f_1(v_R)$  есть число частиц/скорость, то  $\Delta W$  — энергия в единицу времени. Для достаточно больших промежутков времени весь эффект определяется значением функции распределения при скорости, равной фазовой скорости волны.

Оценить декремент затухания можно, вычислив отношение энергии, теряемой волной за один период  $\Delta t = 2\pi/\omega$  к  $E_1^2/8\pi$ . (Из этого количества только половину составляет энергия электрического поля. Однако помимо этой энергии с волной всегда связана какая-либо еще энергия: энергия магнитного поля, или кинетическая энергия нерезонансных частиц, или какая-либо еще, в зависимости от конкретного случая). Вычисляя отношение, находим

$$\frac{\Delta W/\text{период}}{E_1^2/8\pi} = 2\pi^2 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[ \frac{1}{N} \frac{\omega}{k} f_1\left(\frac{\omega}{k}\right) \right], \quad (6.40)$$

где  $N$  — плотность электронов, а  $\omega_p$  — собственная частота плазмы. Величина в квадратных скобках безразмерная и для максвелловского распределения с температурой  $\theta$  (размерность — энергия) равна

$$\frac{1}{N} \frac{\omega}{k} f_1\left(\frac{\omega}{k}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{v_\Phi}{v_T} \exp\left[-\left(\frac{v_\Phi}{v_T}\right)^2\right], \quad (6.41)$$

где

$$\left. \begin{aligned} v_T &= \sqrt{2\theta/m} \text{ — тепловая скорость} \\ v_\Phi &= \frac{\omega}{k} \text{ — фазовая скорость} \end{aligned} \right\} \quad (6.42)$$

Затухание мало, если  $v_T \ll v_\Phi$ . Для продольных волн в электронной плазме  $\omega \approx \omega_p$ , и затухание существенно, когда  $v_\Phi \approx v_T$ , т. е. когда

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{1}{k} \approx \frac{1}{\omega_p} \sqrt{\frac{2\theta}{m}} = \sqrt{2}\lambda_D, \quad (6.43)$$



где

$$\lambda_D = \sqrt{\theta/4\pi N e^2}. \quad (6.44)$$

Величина  $\lambda_D$  называется дебаевским радиусом (подробнее см. гл. 8).

### § 6.5. Магнитогидродинамические, или альфвеновские, волны

В § 6.2 было показано, что электроны оказывают очень сильное влияние на электромагнитные волны, если они не связаны. Наличие внешнего постоянного магнитного поля  $\mathbf{B}_{\text{вн}}$  также оказывает сильное влияние, за исключением того случая, когда электрическое поле волны параллельно приложенному магнитному полю. Тогда  $\mathbf{B}_{\text{вн}}$  не влияет на движение частиц, вызванное электрическим полем волны, так что выводы § 6.2 остаются в силе. Надо, однако, отметить, что если ларморовская частота электронов превышает частоту волны, доплеровский сдвиг начальной скорости частицы несколько изменяется.

В этом параграфе будем рассматривать такие волны, у которых электрическое поле перпендикулярно внешнему магнитному полю. Предположим, что частота волны мала даже по сравнению с ларморовской частотой ионов. Тогда мы вправе применять метод орбит первого приближения, изложенный в гл. 2. В следующем параграфе распространим результаты на случай более высоких частот, пренебрегая, однако, некоторыми эффектами, легко вычисляемыми при малых частотах.

Взяв электрическое поле, перпендикулярное  $\mathbf{B}_{\text{вн}}$ , в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_1 \exp \{i[(\mathbf{k}\mathbf{r}) - \omega t]\}, \quad (6.45)$$

где подразумевается использование только действительной части, можно выбрать любое направление вектора  $\mathbf{k}$  в плоскости, нормальной к  $\mathbf{E}_1$ . (Электрическое поле, таким образом, оказывается поперечным.) Рассмотрим два частных случая:  $\mathbf{k}$  параллельно  $\mathbf{B}_{\text{вн}}$  и  $\mathbf{k}$  перпендикулярно  $\mathbf{B}_{\text{вн}}$ . Пусть магнитное поле волны имеет вид

$$\delta\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_1 \exp \{i[(\mathbf{k}\mathbf{r}) - \omega t]\}, \quad (6.46)$$

где опять имеется в виду действительная часть. Как указывалось выше, из уравнения  $\nabla\mathbf{B}=0$  следует, что  $\mathbf{B}_1$  пер-

перпендикулярно  $\mathbf{k}$ . Поскольку уравнение  $[\nabla \mathbf{E}] = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  также приводит к перпендикулярности  $\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{E}_1$ , можно заключить, что  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{k}$  образуют тройку взаимно перпендикулярных векторов.

1) Вектор  $\mathbf{k}$  перпендикулярен  $\mathbf{B}_{\text{вн}}$ . В этом случае  $\mathbf{B}_1$  параллельно  $\mathbf{B}_{\text{вн}}$ . Поэтому магнитные силовые линии остаются прямыми, но абсолютная величина напряженности полного магнитного поля меняется периодически в перпендикулярном к ним направлении. Можно представить себе, что силовые линии как бы колеблются, попеременно сгущаясь и расходясь в каждой точке. Для этого случая оказываются выполненными условия теоремы 2 (см. § 2.8), поэтому частицы под влиянием электрического дрейфа будут также двигаться вместе с силовыми линиями, причем отношение  $N$  к  $B$  будет сохраняться постоянным. Одновременно частицы движутся по ларморовским окружностям (если только их начальная энергия не равна нулю). При этом отношение  $\omega_{\perp}/B$  также сохраняется постоянным для каждой частицы. Поэтому равенство

$$\frac{N\omega_{\perp}}{B^2} = \text{const} \quad (6.47)$$

справедливо для всех моментов времени, если оно выполнялось в начальный момент, что мы будем предполагать.

Нам теперь нужно просто просуммировать те из упомянутых в § 3.1 токов, которые существуют в этом случае. Во-первых, нужно учесть ток поляризации

$$\mathbf{j}_p = \frac{NMc^2}{B^2} \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (6.48)$$

(Вкладом электронов пренебрегаем.) Ток намагничения имеет вид

$$\mathbf{j}_m = - \left[ \nabla \frac{N\omega_{\perp}}{B^2} \mathbf{B} \right] = - \frac{N\omega_{\perp}}{B^2} [\nabla \mathbf{B}]. \quad (6.49)$$

При написании тока, вызванного градиентом  $B$ , отметим, что\*

$$[\nabla \mathbf{B}] = [\nabla B \mathbf{B}_0] = B [\nabla \mathbf{B}_0] - [\mathbf{B}_0, \nabla B] = - [\mathbf{B}_0 \nabla B],$$

\* В этом равенстве, как и в § 3.1,  $\mathbf{B}_0$  — единичный вектор в направлении  $\mathbf{B}$ .

поскольку  $[\nabla \mathbf{B}_0] = 0$  в данном случае. Поэтому ток, вызванный градиентом, равен

$$\mathbf{j}_G = -\frac{N\omega_{\perp}}{B^2} [\nabla \mathbf{B}]. \quad (6.50)$$

Перечисленными тремя токами исчерпываются все токи, существующие в этом случае. Подставив эти токи в уравнение (1.4), получим в первом приближении ( $B_1 \ll B_{\text{вн}}$ ):

$$\left(1 + \frac{8\pi N\omega_{\perp}}{B_{\text{вн}}^2}\right) [\nabla \delta \mathbf{B}] = \left(1 + \frac{4\pi NMc^2}{B_{\text{вн}}^2}\right) \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (6.51)$$

где  $N$  и  $\omega_{\perp}$  равны своим начальным постоянным значениям. Кроме того, считаем, что  $N\omega_{\perp}$  включает полную плотность поперечной энергии электронов и ионов. Вместо  $NM$  можно было бы написать  $N(M + m)$ , однако вкладом электронов в этом выводе пренебрегалось.

Уравнение (6.51) принимает обычный вид, если ввести диэлектрическую постоянную:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \left(1 + \frac{4\pi NMc^2}{B_{\text{вн}}^2}\right) / \left(1 + \frac{8\pi N\omega_{\perp}}{B_{\text{вн}}^2}\right) \approx \\ &\approx \frac{1}{2} NMc^2 / \left(\frac{B_{\text{вн}}^2}{8\pi} + N\omega_{\perp}\right). \end{aligned} \quad (6.52)$$

Указанное разложение оправдано, поскольку для большинства случаев  $\frac{4\pi NMc^2}{B_{\text{вн}}^2} \gg 1$ .

Для среды, имеющей скалярную диэлектрическую постоянную, уравнения (1.2) и (1.4) записываются для плоских волн в виде

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{k} \mathbf{E}_1] &= \frac{\omega}{c} \mathbf{B}_1, \\ [\mathbf{k} \mathbf{B}_1] &= -\varepsilon \frac{\omega}{c} \mathbf{E}_1. \end{aligned} \right\} \quad (6.53)$$

Из этих уравнений следует: 1)  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{B}_1$  взаимно ортогональны, 2) дисперсионное соотношение

$$k^2 = \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \quad (6.54)$$

для рассматриваемого случая принимает вид:

$$k^2 = \frac{1}{2} \left[ NM / \left( \frac{B_{\text{вн}}^2}{8\pi} + N\omega_{\perp} \right) \right] \omega^2. \quad (6.55)$$

Отсюда следует, что фазовая скорость  $v_{\phi} = \frac{\omega}{k}$  и групповая скорость  $v_g = d\omega/dk$  такой волны равны

$$v_{\phi} = v_g = \sqrt{\frac{2 \left( \frac{B_{\text{вн}}^2}{8\pi} + N\omega_{\perp} \right)}{NM}} = \sqrt{2 \frac{\text{давление}}{\text{плотность}}}. \quad (6.56)$$

Аналогия со звуковыми волнами в газе с  $\gamma = 2$  очевидна.

По сути дела, этот результат можно было бы получить непосредственно из выводов § 4.3, где показано, что в случае прямолинейных силовых линий  $\mathbf{B}$  задача сводится к гидродинамической с  $\gamma = 2$ . На примере простой задачи было повторно доказательство такой эквивалентности для большей наглядности.

2) Вектор  $\mathbf{k}$  параллелен  $\mathbf{B}_{\text{вн}}$ . В этом случае  $\mathbf{V}_1$  ортогонально  $\mathbf{B}_{\text{вн}}$ . Поэтому абсолютная величина  $\mathbf{B}$  не меняется в первом приближении под действием волны, в силу чего ток, вызванный градиентом, отсутствует. Однако силовые линии  $\mathbf{B}$  уже не прямые, а принимают синусоидальную форму ( $B_1 \ll B_{\text{вн}}$ ), как показано на рис. 6.2.

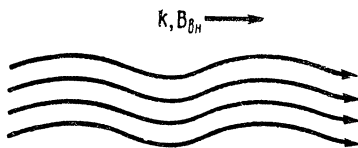


Рис. 6.2. Искривление силовых линий в случае  $\mathbf{B}_{\text{вн}} \parallel \mathbf{k}$ .

Помимо токов поляризации и намагничивания теперь появляется еще ток, вызванный кривизной линий. Первые два тока описываются выражениями (6.48) и (6.49), как и в предшествующем случае. Ток, вызванный кривизной, равен

$$\mathbf{j}_R = \frac{2N\omega_{\perp}}{B} [\mathbf{B}_0, (\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{B}_0].$$

Проведем некоторые векторные преобразования. Во-первых, отметим, что, согласно тождеству (1.22),

$$[\mathbf{B}_0 [\nabla \mathbf{B}_0]] \frac{\nabla B_0^2}{2} - (\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{B}_0 = -(\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{B}_0,$$

где учтено, что  $B_0^2 = 1$ . Следовательно, другим столь же общим выражением для тока, вызванного кривизной, будет:

$$\mathbf{j}_R = -\frac{2N\omega_{\parallel}}{B} [\mathbf{B}_0 [\mathbf{B}_0 [\nabla\mathbf{B}_0]]]. \quad (6.57)$$

Согласно формуле тройного векторного произведения,

$$[\mathbf{B}_0 [\mathbf{B}_0 [\nabla\mathbf{B}_0]]] = (\mathbf{B}_0 (\mathbf{B}_0 [\nabla\mathbf{B}_0])) - B_0^2 [\nabla\mathbf{B}_0].$$

Если, как на рис. 6.2, силовые линии лежат в плоскости страницы, вектор  $[\nabla\mathbf{B}_0]$  перпендикулярен этой плоскости и поэтому  $(\mathbf{B}_0 [\nabla\mathbf{B}_0])=0$ . Следовательно, в нашем случае (но не в любом!)

$$[\mathbf{B}_0 [\mathbf{B}_0 [\nabla\mathbf{B}_0]]] = -[\nabla\mathbf{B}_0] = -\frac{1}{B} [\nabla\mathbf{B}],$$

так как с точностью до первого порядка величина  $B$  постоянна. Итак, имеем

$$\{\mathbf{j}_R = \frac{2N\omega_{\parallel}}{B^2} [\nabla\mathbf{B}]. \quad (6.58)$$

Подставляя все токи в уравнение (1.4), находим

$$\left(1 + \frac{4\pi N(\omega_{\perp} - 2\omega_{\parallel})}{B_{\text{ВН}}^2}\right) [\nabla\delta\mathbf{B}] = \left(1 + \frac{4\pi NMc^2}{B_{\text{ВН}}^2}\right) \frac{1}{c} \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}. \quad (6.59)$$

Это опять обычное уравнение для поля в среде с диэлектрической постоянной:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \left(1 + \frac{4\pi NMc^2}{B_{\text{ВН}}^2}\right) / \left(1 + \frac{4\pi N(\omega_{\perp} - 2\omega_{\parallel})}{B_{\text{ВН}}^2}\right) \approx \\ &\approx NMc^2 / \left[\frac{B_{\text{ВН}}^2}{4\pi} + N(\omega_{\perp} - 2\omega_{\parallel})\right], \end{aligned} \quad (6.60)$$

где учтено обычное неравенство  $\frac{4\pi NMc^2}{B_{\text{ВН}}^2} \gg 1$ . Таким образом, дисперсионное соотношение имеет вид

$$k^2 = \frac{1}{2} \frac{NM}{B_{\text{ВН}}^2/8\pi + (N/2)(\omega_{\perp} - 2\omega_{\parallel})} \omega^2, \quad (6.61)$$

а фазовая и групповая скорости равны

$$v_{\phi} = v_g = \sqrt{2 \left[ \frac{B_{\text{ВН}}^2}{8\pi} + (N/2)(\omega_{\perp} - \omega_{\parallel}) \right] / NM}. \quad (6.62)$$

Отметим, что если распределение по скоростям изотропно, то  $\omega_{\perp} = 2\omega_{\parallel}$  и энергия частиц не фигурирует в уравнениях (6.61) и (6.62).

3) Вектор  $\mathbf{k}$  направлен произвольно. Пусть теперь  $\mathbf{k}$  имеет произвольное направление. Тогда напряженность электрического поля ортогональна к  $\mathbf{V}_{\text{ВН}}$  и  $\mathbf{k}$ , а вектор  $\delta\mathbf{V}$  снова направлен ортогонально к  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{E}$ . Таким образом,  $\delta\mathbf{V}$  имеет слагающую  $\delta\mathbf{V}_{\parallel}$ , параллельную  $\mathbf{V}_{\text{ВН}}$ , которая приводит к токам, рассмотренным в первом случае, и слагающую  $\delta\mathbf{V}_{\perp}$ , перпендикулярную  $\mathbf{V}_{\text{ВН}}$ , которая создает токи во втором случае. Рассмотрение, аналогичное приведенному выше, приводит к дисперсионному соотношению

$$v_{\phi}^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{2}{NM} \left\{ \frac{B_{\text{ВН}}^2}{8\pi} + N\omega_{\perp} - \frac{N}{2}(\omega_{\perp} + 2\omega_{\parallel}) \cos \theta \right\}, \quad (6.63)$$

где  $\theta$  — угол между  $\mathbf{V}_{\text{ВН}}$  и  $\mathbf{k}$ .

Фазовая скорость  $v_{\phi}$  зависит от направления вектора  $\mathbf{k}$ . Более того, групповая скорость  $\mathbf{v}_g$  не параллельна  $\mathbf{k}$ . Например, если выбрать ось  $z$  вдоль  $\mathbf{V}_{\text{ВН}}$ , то  $x$ -я и  $y$ -я компоненты групповой скорости будут равны:

$$\left. \begin{aligned} v_{gx} &= \frac{\partial \omega}{\partial k_x} = \frac{k_x}{\omega} \left[ \frac{2}{NM} \left\{ \frac{B_{\text{ВН}}^2}{8\pi} + N\omega_{\perp} \right\} \right], \\ v_{gy} &= \frac{\partial \omega}{\partial k_z} = \frac{k_z}{\omega} \times \\ &\times \left[ \frac{2}{NM} \left\{ \frac{B_{\text{ВН}}^2}{8\pi} + \frac{N}{2}(\omega_{\perp} - 2\omega_{\parallel}) \right\} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6.64)$$

Таким образом, вектор групповой скорости образует с  $\mathbf{V}_{\text{ВН}}$  угол, больший, чем вектор  $\mathbf{k}$ .

Волны рассмотренного типа называются магнитогидродинамическими, или волнами Альфвена. Это по существу разновидность низкочастотных электромагнитных волн. Хотя мы проводили рассмотрение, исходя из разложения по плоским волнам, можно вместо них использовать и

элементарные волны другой симметрии. Например, при рассмотрении плазмы, заключенной в цилиндр с осью вдоль внешнего поля, удобнее пользоваться цилиндрическими волнами. При этом надо только иметь в виду условие  $\mathbf{E} \perp \mathbf{V}_{\text{вн}}$ , так что из числа волн, получаемых в теории волноводов, в таком цилиндре могут существовать только волны, у которых поле  $\mathbf{E}$  поперечное.

В завершение этого раздела упомянем еще о том, что диэлектрическая постоянная (6.60) для второго случая может стать отрицательной, если



Рис. 6.3. Возникновение неустойчивости.

$$N\omega_{\parallel} > \frac{B_{\text{вн}}^2}{8\pi} + \frac{N\omega_{\perp}}{2}. \quad (6.65)$$

В этом случае для уравнения (6.61) для действительных  $k$  получается положительное или отрицательное мнимое значение  $\omega$ , т. е. имеются решения, амплитуда которых нарастает экспоненциально со временем. Такие решения назовем неустойчивыми, или просто неустойчивостями, и подробнее рассмотрим дальше. Причину появления указанной неустойчивости легко понять. Частицы, движущиеся вдоль изогнутой силовой линии (рис. 6.3), испытывают действие центробежной силы  $2\omega_{\parallel}/R$ , где  $R$  радиус кривизны линии. Эта центробежная сила стремится еще больше изогнуть силовую линию. С другой стороны, натяжение, действующее между силовыми линиями  $\mathbf{V}_{\text{вн}}^2/8\pi$ , противодействует их изгибанию. Силы, возникающие из-за наличия тока намагничения (пропорционального  $[\mathbf{j}_m \mathbf{V}]$ ), также стремятся вернуть линии в исходное положение. Если центробежная сила превышает эти силы, то амплитуда движения растет экспоненциально; в противном случае движение носит колебательный характер. При этом силы инерции связаны с частицами, вынужденными двигаться вслед за силовыми линиями.

## § 6.6. Волны произвольной частоты. Вектор $\mathbf{k}$ параллелен $\mathbf{V}_{\text{вн}}$

Освободимся теперь от ограничения, требующего, чтобы частота волны была меньше ларморовской. Для этого необходимо снова, как в § 6.2, возвратиться к рассмотрению непосредственно уравнений движения частиц. Электриче-

ское поле будем считать ортогональным постоянному внешнему полю, поскольку задача с  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{V}_{\text{вн}}$  уже была изучена в § 6.2. Положим для определенности, что поле направлено вдоль оси  $z$ , как показано на рис. 6.4. Рассмотрим два крайних случая: когда волновой вектор  $\mathbf{k}$  параллелен  $\mathbf{V}_{\text{вн}}$  и когда он перпендикулярен  $\mathbf{V}_{\text{вн}}$ .

Рассмотрим сначала случай  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{V}_{\text{вн}}$ . Электрическое поле волны направлено вдоль оси  $x$  или  $y$ . При наличии магнитного поля движение в одном направлении вызывает движение в перпендикулярном ему направлении, поэтому поле  $\mathbf{E}$  должно иметь как компоненту  $x$ , так и компоненту  $y$ . Проще всего провести рассмотрение для волн с круговой поляризацией.

Пусть компоненты  $x$  и  $y$  поля  $\mathbf{E}$  будут соответственно равны

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_1 \cos(kz - \omega t), \\ E_y &= E_1 \sin(kz - \omega t), \end{aligned} \right\} (6.66)$$

где пока все величины — действительные. Однако можно ввести комплексную величину

$$E = E_x + iE_y = E_1 e^{i(kz - \omega t)}. \quad (6.67)$$

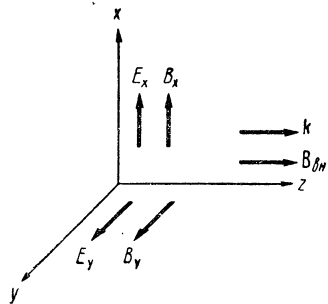


Рис. 6.4. Ориентация полей для случая  $\mathbf{V}_{\text{вн}} \parallel \mathbf{k}$ .

В уравнении (6.67) можно считать  $E_1$  комплексной величиной, так как это просто эквивалентно изменению фазы волны. Подобным образом магнитное поле может быть представлено в виде

$$B = B_x + iB_y = B_1 e^{i(kz - \omega t)}. \quad (6.68)$$

Отметим, что изменение знака  $\omega$  соответствует изменению направления поляризации.

Пренебрежем тепловым движением частиц, считая, что их движение полностью определяется полем волны. Такое пренебрежение, естественно, справедливо лишь, когда газокинетическое давление мало по сравнению с магнитным.



Уравнения движения для иона имеют вид:

$$\dot{v}_x = \frac{e}{M} \left[ E_x + \frac{v_y}{c} B_{\text{вн}} \right]; \quad (6.69)$$

$$\dot{v}_y = \frac{e}{M} \left[ E_y - \frac{v_x}{c} B_{\text{вн}} \right]; \quad (6.70)$$

$$\dot{v}_z = 0. \quad (6.71)$$

Здесь опущены все члены второго порядка малости, такие, как, например,  $v_z B_y$ . В соответствии с предположением об отсутствии теплового движения решение уравнения (6.71) есть  $v_z = 0$ . Введя комплексную скорость

$$v = v_x + i v_y, \quad (6.72)$$

преобразуем уравнения (6.69) и (6.70) к виду

$$\dot{v} = \frac{e}{M} E - i \omega_i v, \quad (6.73)$$

где  $\omega_i$  — ларморовская частота иона, равная

$$\omega_i = \frac{e B_{\text{вн}}}{M c}. \quad (6.74)$$

Поскольку  $E$  в системе координат частицы зависит от времени как  $e^{-i\omega t}$ , скорость будет зависеть подобным же образом, и можно написать

$$\dot{v} = -i\omega v.$$

Поэтому решение уравнения (6.73) есть

$$v = i \frac{e}{M} \frac{E}{\omega - \omega_i},$$

а комплексный ток ионов

$$j_i = \frac{N e v}{c} = i \frac{N e^2}{M (\omega - \omega_i)} \frac{E}{c} = - \frac{N e^2}{M \omega (\omega - \omega_i)} \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Аналогично ток, создаваемый электронами:

$$j_e = - \frac{N e^2}{m \omega (\omega + \omega_e)} \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t},$$

где ларморовская частота электронов  $\omega_e$  считается положительной величиной. Складывая токи ионов и электронов и учитывая ток смещения, найдем диэлектрическую постоянную

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi N e^2}{\omega} \left( \frac{1}{M(\omega - \omega_i)} + \frac{1}{m(\omega + \omega_e)} \right). \quad (6.75)$$

Подставив это выражение в дисперсионное соотношение  $k^2 = \varepsilon \omega^2 / c^2$ , найдем связь между  $k$  и  $\omega$ .

Можно привести выражение для  $\varepsilon$  к более удобному виду, преобразовав сумму в скобках, с учетом того, что  $M\omega_i = m\omega_e$ , тогда

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - \omega_i)(\omega + \omega_e)}, \quad (6.76)$$

где  $\omega_p$  определяется через приведенную массу:

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{(M + M)/mM}. \quad (6.77)$$

(Обычно именно приведенная масса фигурирует в выражении для плазменной частоты. Однако эта масса очень мало отличается от электронной.)

При малых частотах, когда  $|\omega| < \omega_i$ ,

$$\varepsilon \approx \varepsilon_0 = 1 + \frac{4\pi N M c^2}{B_{\text{ВН}}^2}, \quad (6.78)$$

где мы пренебрегли  $m$  по сравнению с  $M$ . Это выражение совпадает с ранее найденным в гл. 2 на основе метода ларморовских орбит; дисперсионное соотношение, получающееся из выражения (6.78), совпадает с полученным в § 6.5 при пренебрежении газокинетическим давлением и равно

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[ 1 + \frac{4\pi N M c^2}{B_{\text{ВН}}^2} \right]. \quad (6.79)$$

Зависимость общего выражения (6.76) от частоты изображена на рис. 6.5. При положительных  $\omega$  направление поляризации совпадает с направлением ларморовского движения ионов и поведение  $\varepsilon$  описывается правой

половиной графика. При  $\omega = \omega_i$   $\varepsilon$  стремится к бесконечности, затем между  $\omega_i$  и  $\omega_1$ , где

$$\omega_1 = -\frac{\omega_e}{2} + \sqrt{\frac{\omega_e^2}{4} + \omega_p^2}, \quad (6.80)$$

принимает отрицательное значение. При выводе выражения для  $\omega_1$  отношением  $1/M$  мы пренебрегли по сравнению с  $1/m$ . В области между  $\omega_i$  и  $\omega_1$  волны не могут

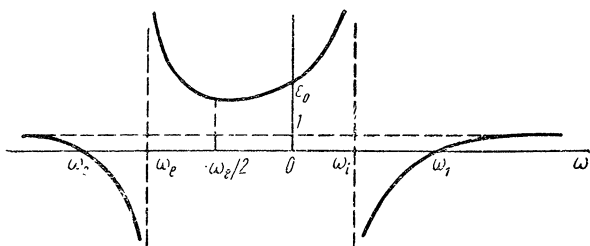


Рис. 6.5. Диэлектрическая постоянная для случая  $\mathbf{V}_{\text{вн}} \parallel \mathbf{k}_{\text{вн}}$ .

распространяться в плазме, а полностью отражаются от нее. Для больших  $\omega$   $\varepsilon$  асимптотически приближается к единице.

Для отрицательных  $\omega$  направление круговой поляризации совпадает с направлением ларморовского вращения электронов.  $\varepsilon$  изменяется от значения  $\varepsilon_0$  при 0 до минимального значения:

$$\varepsilon_{\text{мин}} \approx 1 + \frac{4\omega_p^2}{\omega_e^2} \quad (6.81)$$

при  $\omega = \omega_e/2$ , после чего растет, обращаясь в бесконечность при  $\omega = -\omega_e$ . В области от  $-\omega_e$  до  $\omega_2$ , где

$$\omega_2 = -\frac{\omega_e}{2} - \sqrt{\frac{\omega_e^2}{4} + \omega_p^2}, \quad (6.82)$$

$\varepsilon$  принимает отрицательные значения и, наконец, при  $\omega \rightarrow -\infty$  асимптотически стремится к единице. Это рассмотрение также основано на пренебрежении  $1/M$  по сравнению с  $1/m$ .

Зависимость  $\epsilon$  от направления поляризации соответствует известному эффекту Фарадея, а весь приведенный вывод совпадает с классическим выводом этого эффекта, за исключением пренебрежения упругими связями электронов с атомами, существенными в оптике, а в рассматриваемом случае отсутствующими.

### § 6.7. Волны произвольной частоты. Вектор $\mathbf{k}$ перпендикулярен $\mathbf{V}_{\text{вн}}$

Будем считать внешнее поле  $\mathbf{V}_{\text{вн}}$  направленным вдоль оси  $z$ , а  $\mathbf{k}$  — вдоль оси  $x$ , как показано на рис. 6.6, и по-прежнему не будем интересоваться случаем  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{V}_{\text{вн}}$ . Поскольку поле  $\mathbf{E}$  стремится быть направленным ортогонально к  $\mathbf{k}$ , необходимо допустить существование компоненты  $E_y$ . Однако ввиду наличия магнитного поля, искривляющего траектории частиц, необходимо допустить существование и продольной компоненты у поля  $E_x$ . Прежде чем рассматривать магнитное поле волны, подсчитаем токи.

Зададим электрическое поле в виде

$$\left. \begin{aligned} E_x(x, t) &= E_1 e^{i(kx - \omega t)}, \\ E_y(x, t) &= E_2 e^{i(kx - \omega t)}, \end{aligned} \right\} (6.83)$$

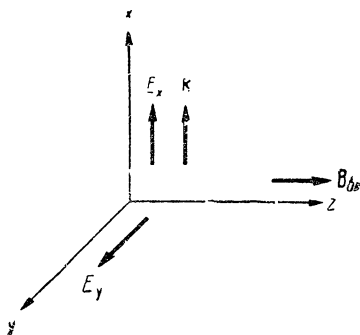


Рис. 6.6. Ориентация полей для случая  $\mathbf{V}_{\text{вн}} \perp \mathbf{k}_{\text{вн}}$ .

где подразумевается использование действительных частей. Уравнения движения ионов имеют вид:

$$\dot{v}_x = \frac{e}{M} \left[ E_x + \frac{1}{c} v_y B_{\text{вн}} \right],$$

$$\dot{v}_y = \frac{e}{M} \left[ E_y - \frac{1}{c} v_x B_{\text{вн}} \right].$$

По-прежнему членами второго порядка в квадратных скобках пренебрегаем. Также будем считать, что обратное действие частиц на поле можно не учитывать. В этом слу-

чае скорость частиц будет зависеть от времени как  $e^{-i\omega t}$ , и уравнения движения примут вид:

$$\begin{aligned} -i\omega v_x &= \frac{e}{M} \dot{E}_x + \omega_i v_y, \\ -i\omega v_y &= \frac{e}{M} E_y - \omega_i v_x, \end{aligned}$$

где  $\omega_i$ , как обычно, — ларморовская частота ионов. Находя из этих уравнений  $v_x$  и  $v_y$ , получим

$$v_x = \frac{e}{M} [-i\omega E_x + \omega_i E_y] / (\omega_i^2 - \omega^2),$$

$$v_y = \frac{e}{M} [-i\omega E_y - \omega_i E_x] / (\omega_i^2 - \omega^2).$$

Аналогичные выражения получатся и для компонент скорости электронов. Для плотности тока тогда имеем

$$j_x = \frac{Ne^2}{c} [-i\alpha E_x + \beta E_y], \quad (6.84)$$

$$j_y = \frac{Ne^2}{c} [-i\alpha E_y - \beta E_x], \quad (6.85)$$

где  $N$  — плотность ионов и электронов, а коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  даются следующими выражениями:

$$\alpha = \frac{\omega}{m(\omega_e^2 - \omega^2)} + \frac{\omega}{M(\omega_i^2 - \omega^2)}, \quad (6.86)$$

$$\beta = \frac{\omega_i}{M(\omega_i^2 - \omega^2)} - \frac{\omega_e}{m(\omega_e^2 - \omega^2)}. \quad (6.87)$$

В этих уравнениях  $\omega_i$  и  $\omega_e$  — положительные величины. Выражения (6.84) и (6.85) для токов нужно подставить в уравнения Максвелла.

Наличие плотности тока  $j_x$  приводит к появлению плотности заряда  $\rho$ , поскольку

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{j} = \frac{\partial}{\partial x} j_x = i k j_x.$$

В силу этого

$$i \frac{\omega}{c} \rho = i k j_x, \quad (6.88)$$

а

$$4\pi\rho = \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = ikE_x. \quad (6.89)$$

Используя уравнения (6.88), (6.89) и (6.84), находим

$$E_x = -i \frac{4\pi c}{\omega} j_x = -\gamma\alpha E_x - i\gamma\beta E_y, \quad (6.90)$$

где

$$\gamma = \frac{4\pi N e^2}{\omega}. \quad (6.91)$$

Уравнение (6.90) дает связь между  $E_x$  и  $E_y$ , откуда

$$E_x = \frac{-i\gamma\beta}{(1+\gamma\alpha)} E_y. \quad (6.92)$$

Обратимся теперь к уравнению Максвелла для магнитного поля. Во-первых, отметим, что полный ток в направлении оси  $x$ , включая ток смещения, равен в соответствии с уравнением (6.90) нулю:

$$4\pi j_x + \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = 4\pi j_x - i \frac{\omega}{c} E_x = 0.$$

Поэтому

$$\operatorname{rot}_x \mathbf{B} = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0.$$

Это уравнение удовлетворяется, если  $\mathbf{B}$  зависит только от  $x$  и  $t$ , аналогично  $\mathbf{E}$  в формуле (6.83).

Как обычно, уравнение  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  приводит к ортогональности переменной части магнитного поля  $\delta\mathbf{B}$  и вектора  $\mathbf{k}$ , а уравнение  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  — к перпендикулярности  $\delta\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$ . Таким образом, векторное уравнение Максвелла сводится с помощью уравнений (6.85) и (6.92) к единственному уравнению:

$$\operatorname{rot}_y (\delta\mathbf{B}) = 4\pi j_y + \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \left[ 1 + \gamma\alpha - \frac{(\gamma\beta)^2}{1 + \gamma\alpha} \right] \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t}.$$

Отсюда диэлектрическая постоянная равна

$$\varepsilon = 1 + \gamma\alpha - \frac{(\gamma\beta)^2}{1 + \gamma\alpha}. \quad (6.93)$$

Упростим выражение (6.93). Во-первых, заметим, что

$$\begin{aligned} \gamma\alpha &= 4\pi N e^2 \left[ \frac{1}{m(\omega_e^2 - \omega^2)} + \frac{1}{M(\omega_i^2 - \omega^2)} \right] = \\ &= 4\pi N e^2 \frac{(m + M)}{mM} [\omega_i \omega_e - \omega^2] / (\omega_e^2 - \omega^2)(\omega_i^2 - \omega^2). \end{aligned}$$

При выводе этого соотношения принималось во внимание  $M\omega_i = m\omega_e$ . Используя снова в выражении для плазменной частоты приведенную массу, можно переписать последнее уравнение в виде

$$\gamma\alpha = \frac{\omega_p^2 (\omega_i \omega_e - \omega^2)}{(\omega_e^2 - \omega^2)(\omega_i^2 - \omega^2)}. \quad (6.94)$$

Далее, можно показать, что

$$\gamma\beta = \frac{\omega_p^2 (\omega_e - \omega_i) \omega}{(\omega_e^2 - \omega^2)(\omega_i^2 - \omega^2)}. \quad (6.95)$$

Из уравнений (6.94), (6.95) и (6.93) получим после алгебраических преобразований

$$\varepsilon = 1 + \frac{\omega_p^2 (\omega_p^2 + \omega_i \omega_e - \omega^2)}{(\omega_e^2 - \omega^2)(\omega_i^2 - \omega^2) + \omega_p^2 (\omega_i \omega_e - \omega^2)}. \quad (6.96)$$

Обратим, во-первых, внимание на то, что  $\varepsilon$  не обращается в бесконечность при частоте, равной электронной или ионной ларморовской частоте. Отсутствие резонанса на этих частотах вызвано тем, что движение электронов и ионов сильно связано в силу наличия их общего продольного электрического поля  $E_x$ . Как мы увидим, резонанс появляется при частоте, равной среднему геометрическому из  $\omega_i$  и  $\omega_e$ .

Исследуем сначала поведение  $\varepsilon$  при малых  $\omega$ , т. е. при  $\omega \ll \omega_i$ . Полагая для этого в уравнении (6.96)  $\omega = 0$ , найдем

$$\varepsilon \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_e \omega_i} \approx 1 + \frac{4\pi N M c^2}{B_{\text{ВН}}^2}. \quad (6.97)$$

Этот результат совпадает с полученным в § 6.5 для случая, когда газокINETической давление много меньше магнитного.

Отношение  $\omega_e$  к  $\omega_i$  равно  $M/m$  и является определенным числом. Однако отношение  $\omega_p$  к  $\omega_e$  зависит от плотности частиц  $N$  и от  $B_{\text{вн}}$ . Действительно:

$$\frac{\omega_p^2}{\omega_e^2} = \frac{4\pi N m c^2}{B_{\text{вн}}^2} \approx 10^{-5} \frac{N}{B_{\text{вн}}^2}. \quad (6.98)$$

При  $N = 10^{15}$  и  $B_{\text{вн}} = 10^4$  гс  $\frac{\omega_p^2}{\omega_e^2} = 10^2$ . Как часто (но не всегда!) оказывается, величинами  $\omega_i^2$  и  $\omega_e^2$  можно прене-

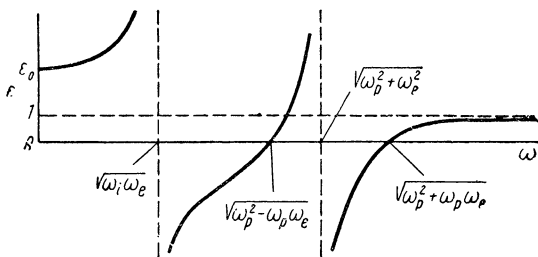


Рис. 6.7. Зависимость диэлектрической постоянной от частоты для  $\mathbf{B}_{\text{вн}} \perp \mathbf{k}_{\text{вн}}$ .

бречь по сравнению с  $\omega_p^2$ . Если, кроме этого,  $\omega \ll \omega_e$ , то  $\varepsilon$  имеет вид

$$\varepsilon \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_i \omega_e - \omega^2)} \quad \text{при } \omega \ll \omega_e \ll \omega_p. \quad (6.99)$$

Отсюда видно, что первая особенность  $\varepsilon$  возникает при  $\omega = \sqrt{\omega_i \omega_e}$ , среднему геометрическому из  $\omega_i$  и  $\omega_e$ . С другой стороны, если  $\omega \gg \sqrt{\omega_e \omega_i}$ , то

$$\varepsilon \approx 1 + \frac{\omega_p^2 (\omega_p^2 - \omega^2)}{\omega^2 [\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_e^2]} \quad \text{при } \begin{cases} \omega_e \ll \omega_p \\ \sqrt{\omega_e \omega_i} \ll \omega. \end{cases} \quad (6.100)$$

Из выражения (6.100) видно, что вторая особенность возникает при  $\omega^2 = \omega_p^2 + \omega_e^2$  и что  $\varepsilon$  обращается в нуль при  $\omega^2 \approx \omega_p^2 \pm \omega_p \omega_e$ .

Наконец, если  $\omega \gg \omega_p$ , то  $\varepsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ . Зависимость диэлектрической постоянной  $\varepsilon$  для случая  $\omega_e \ll \omega_p$  представлена на рис. 6.7.



Несмотря на то что поле  $\mathbf{E}$  имеет продольную компоненту, дисперсионное соотношение равно  $k^2 = \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}$ . Связь между продольной и поперечной частями  $\mathbf{E}$  дается уравнением (6.92).

### § 6.8. Задача с начальными условиями

В предшествовавших параграфах рассматривалось дисперсионное соотношение как уравнение, определяющее волновой вектор по заданной частоте. Такой подход соответствует условиям на практике, так как одним из возможных экспериментов является возбуждение плазмы источником колебаний заданной частоты.

Другим возможным типом эксперимента является изучение поведения во времени определенного начального состояния плазмы. Можно представить, что первоначальное возмущенное состояние связано с какими-то внешними источниками. После начального момента  $t_0$  внешние источники выключаются, и плазма движется самостоятельно. Такого типа задачи называются задачами с начальными условиями, или задачами Коши.

Обычный метод решения подобных задач состоит в разложении начального возмущения в ряд Фурье по волнам вида  $\exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r})]$ , причем каждая из компонент будет во времени осциллировать с собственной частотой, определяемой соответствующим ей значением  $k$ . В этом случае будем считать  $\mathbf{k}$  заданным и должны решать дисперсионное уравнение для нахождения  $\omega$ .

Из графика на рис. 67, представляющего зависимость  $\varepsilon$  от  $\omega$ , ясно, что при заданном  $k$  уравнение  $k^2 = \varepsilon\omega^2/c^2$  может иметь несколько решений для  $\omega$ . Указанным различным частотам должны соответствовать различные способы формирования начального состояния. Покажем, что это действительно так для волн, рассмотренных в § 6.7.

Выберем, так же как и на рис. 6.6, ось  $z$  параллельно приложенному магнитному полю  $\mathbf{V}_{\text{вн}}$ . Возьмем некоторый произвольный волновой вектор  $\mathbf{k}$ , перпендикулярный  $\mathbf{V}_{\text{вн}}$ . Ось  $x$  пусть параллельна  $\mathbf{k}$ . Выберем, наконец, ось  $y$  так, чтобы полученная система координат была правой.

Как и прежде, потребуем, чтобы электрическое поле не имело компоненты, параллельной  $\mathbf{V}_{\text{вн}}$ . Тогда остаются только компоненты  $E_x$  и  $E_y$ . Из уравнения Максвелла,

содержащего  $\text{rot } \mathbf{E}$ , следует, что в этом случае магнитное поле волны будет коллинеарно вектору

$$\text{rot } \mathbf{E} = i[k\mathbf{E}],$$

т. е. направлено по оси  $z$ . Таким образом, магнитное поле имеет всего одну компоненту  $B_z$ .

Как электроны, так и ионы движутся в плоскости  $xoy$ . Поэтому необходимо учитывать еще четыре компоненты скоростей:  $v_{ex}$ ,  $v_{ey}$ ,  $v_{ix}$ ,  $v_{iy}$ .

Перечисленные величины необходимо определить из уравнений движения и уравнений Максвелла. Для Фурье-компонент эти уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{dB_z}{dt} &= -ikE_y, \\ \frac{1}{c} \frac{dE_x}{dt} &= \frac{-4\pi N_e}{c} (v_{ix} - v_{ex}), \\ \frac{1}{c} \frac{dE_y}{dt} &= -ikB_z - \frac{4\pi N_e}{c} (v_{iy} - v_{ey}), \\ \frac{dv_{ix}}{dt} &= \frac{e}{M} \left[ E_x + \frac{v_{iy}}{c} B_{\text{вн}} \right], \\ \frac{dv_{iy}}{dt} &= \frac{e}{M} \left[ E_y - \frac{v_{ix}}{c} B_{\text{вн}} \right], \\ \frac{dv_{ex}}{dt} &= -\frac{e}{m} \left[ E_x + \frac{v_{ey}}{c} B_{\text{вн}} \right], \\ \frac{dv_{ey}}{dt} &= -\frac{e}{m} \left[ E_y - \frac{v_{ex}}{c} B_{\text{вн}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6.101)$$

(В этих уравнениях  $B_z$  означает лишь переменную часть магнитного поля.) Мы имеем, таким образом, систему из семи дифференциальных уравнений первого порядка.

Для нахождения ее решения необходимо задать еще значения семи величинам:  $B_z$ ,  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $v_{ix}$ ,  $v_{iy}$ ,  $v_{ex}$ ,  $v_{ey}$  в начальный момент. Эти величины могут быть выбраны произвольно.

Учитывая изложенное, мы должны ожидать, что дисперсионное уравнение для  $\omega$  имеет семь корней при заданном  $k$ . Если воспользоваться выражением (6.96) для  $\epsilon$ , то функция  $\epsilon\omega^2/c^2$  будет иметь вид, как на рис. 6.8. Для любого действительного  $k$  из него, очевидно, следует наличие шести значений  $\omega$ .

Создается впечатление, что одного решения не хватает. Действительно, при делении на  $\omega$  в § 6.6 было потеряно одно решение:  $\omega = 0$ . В том, что такое решение системы (6.101) существует, можно убедиться непосредственной под-

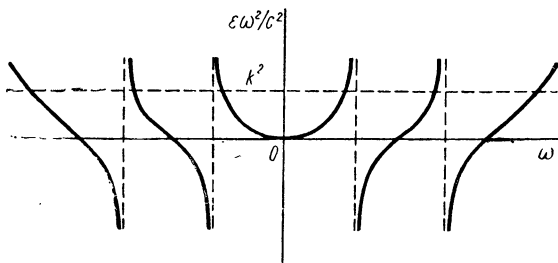


Рис. 6.8. Дисперсионное соотношение  $\mathbf{V}_{\text{вн}} \perp \mathbf{k}_{\text{вн}}$ .

становкой его в эту систему. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы все производные по времени обратились в нуль. В результате получим

$$E_y = v_{ix} = v_{ex} = 0, \quad v_{iy} = v_{ey}, \quad E_x + \frac{1}{c} v_{iy} B_{\text{вн}} = 0.$$

Полученное решение соответствует равновесию электрических и магнитных сил в плазме.

### § 6.9. Косые волны в случае нулевой температуры

В § 6.6 и 6.7 были рассмотрены волны произвольной частоты в плазме, в которой отсутствует тепловое движение, для двух крайних случаев: когда вектор  $\mathbf{k}$  параллелен  $\mathbf{V}$  и когда он перпендикулярен к  $\mathbf{V}_{\text{вн}}$ . Рассуждения § 6.7 легко обобщить на случай, когда вектор составляет произвольный угол  $\theta$  с магнитным полем  $\mathbf{V}_{\text{вн}}$ .

Выберем снова ось  $z$  вдоль  $\mathbf{V}_{\text{вн}}$ , а ось  $x$  в плоскости векторов  $\mathbf{V}_{\text{вн}}$  и  $\mathbf{k}$ . Тогда вектор  $\mathbf{k}$  будет иметь только две компоненты:  $k_x$  и  $k_y$ .

Выражения для плотностей токов  $j_x$  и  $j_y$  даются снова уравнениями (6.84) и (6.85). Кроме того, необходимо предположить существование компоненты электрического поля вдоль оси  $z$ , которая приводит к появлению еще одной компоненты плотности тока:

$$j_z = \mathbf{i} \frac{Ne^2}{\omega c} \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) E_z = \frac{i\omega_p^2}{4\pi\omega c} E_z. \quad (6.102)$$

Уравнение Максвелла (1.2) принимает вид

$$\mathbf{B}_1 = \frac{c}{\omega} [\mathbf{kE}_1]. \quad (6.103)$$

Из уравнения (6.103) по известному полю  $\mathbf{E}_1$  можно определить  $\mathbf{B}_1$ . Уравнение (1.4) дает

$$[\mathbf{kB}_1] = -4\pi i \mathbf{j} - \frac{\omega}{c} \mathbf{E}_1$$

или, исключая с помощью уравнения (6.103)  $\mathbf{B}_1$ ,

$$[\mathbf{k}[\mathbf{kE}_1]] = -4\pi i \frac{\omega}{c} \mathbf{j} - \left(\frac{\omega^2}{c^2}\right) \mathbf{E}_1.$$

Преобразуя двойное векторное произведение, окончательно получаем

$$(\mathbf{k}(\mathbf{kE}_1)) - k^2 \mathbf{E}_1 = -4\pi i \frac{\omega}{c} \mathbf{j} - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_1. \quad (6.104)$$

Выражая с помощью уравнений (6.84), (6.85) и (6.102) плотность тока  $\mathbf{j}$  через  $\mathbf{E}$ , получим однородное уравнение для  $\mathbf{E}$ , которое, если его написать в компонентах, имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \gamma\alpha) - k_z^2 \right] E_x + i \frac{\omega^2}{c^2} \gamma\beta E_y + k_x k_z E_z &= 0; \\ -i \frac{\omega^2}{c^2} \gamma\beta E_x + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \gamma\alpha) - k^2 \right] E_y &= 0; \\ \left[ k_x k_z E_x + \frac{(\omega^2 - \omega_p^2)}{c^2} - k_x^2 \right] E_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.105)$$

Для того чтобы решение этой системы уравнений отличалось от нуля, детерминант ее должен равняться нулю:

$$\left[ \frac{(\omega^2 - \omega_p^2)}{c^2} - k_x^2 \right] \left\{ \left[ \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \gamma\alpha) - k_z^2 \right] \left[ \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \gamma\alpha) - k^2 \right] - \right. \\ \left. - \frac{\omega^4}{c^4} (\gamma\beta)^2 \right\} - k_x^2 k_z^2 \left[ \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \gamma\alpha) - k^2 \right] = 0. \quad (6.106)$$

Уравнение (6.106) является общим дисперсионным соотношением для случая косых волн. Величины  $\gamma\alpha$  и  $\gamma\beta$  определяются равенствами (6.94) и (6.95). Читатель может самостоятельно убедиться в том, что для  $k_x = 0$  или  $k_z = 0$  это общее уравнение дает результаты, совпадающие с выводами § 6.7, 6.6 и 6.2 (если, конечно, в последнем параграфе положить температуру равной нулю).

## МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

### § 7.1. Введение

В § 4.3 было установлено, что общая двумерная задача в случае, если силовые линии  $\mathbf{B}$  — прямые, эквивалентна адиабатической газодинамической задаче при показателе адиабаты  $\gamma = 2$ . Этот результат был получен с помощью метода орбит, т. е. на основании предположения, что встречающиеся частоты малы по сравнению с ларморовскими, а свойства плазмы не меняются существенно на протяжении длин порядка ларморовского радиуса.

Общим свойством волн сжатия в газодинамике при  $\gamma > 1$  является увеличение крутизны их фронта со временем так, как это изображено на рис. 7.1. Наиболее просто это свойство доказывается с помощью метода характеристик Римана. Однако мы не будем рассматривать здесь этот метод, а прибегнем к следующему наглядному доказательству этого свойства. Скорость звука

$$C = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} \approx \sqrt{\gamma \rho^{\gamma-1}},$$

где  $p$  — давление;  $\rho$  — плотность массы; уравнение состояния взято в виде  $p \sim \rho^\gamma$ .

Следовательно, для  $\gamma > 1$  скорость звука будет в максимуме плотности наибольшей. В силу этого вершина волны сжатия стремится нагнать предшествующую волну и ее фронт становится все более крутым. В результате крутизна переднего фронта достигает таких значений, что течение нельзя уже считать адиабатическим. В обычной механике сплошных сред это означает, что градиент плотности достигает таких значений, при которых необходимо учитывать силы вязкости и теплопроводности, ограничи-

вающие дальнейшее увеличение крутизны фронта. Действительно, если учесть эти факторы в исходных уравнениях газодинамики, то из них может быть определена структура фронта такой волны. Эти фронты, получившие названия ударных волн, распространяются со скоростью, большей скорости звука, не меняя существенно своей формы. Силы вязкости и теплопроводность приводят к увеличению энтропии среды. Причем чем сильнее ударная волна, т. е. чем больше отношение давления за ее фронтом к его величине перед ним, тем больше возрастает энтропия.

В высокотемпературной плазме, помещенной в магнитное поле, вязкость и теплопроводность весьма малы, так как частота столкновений, определяющая величину вязкости и теплопроводности (поперек направления магнитного поля), в этом случае незначительна. В обычной механике сплошных сред ширина фронта ударной волны обращается в нуль, если вязкость и теплопроводность исчезают. Поэтому ширина фронта ударной магнитогидродинамической волны в высокотемпературной плазме не может определяться только этими двумя явлениями. Помимо них в плазме необходимо учитывать другие неадиабатические эффекты, и прежде всего связанные с нарушением приближения метода орбит при частотах, больших ларморовских, и на расстояниях, меньших ларморовского радиуса. Можно предположить, что структура и ширина фронта ударной волны в этом случае будут определяться ларморовскими параметрами.

В § 7.2 и 7.3 мы рассмотрим, какие условия налагаются на магнитогидродинамические ударные волны законами сохранения массы, импульса и энергии, не затрагивая вопроса о структуре волны, за исключением предположения о том, что ширина фронта не увеличивается со временем и условия за фронтом и перед ним сохраняются стационарными. В остальных параграфах рассмотрим некоторые подходы к изучению структуры фронта ударной волны, пренебрегая для начала столкновениями.

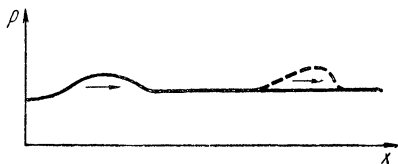


Рис. 7.1. Деформация волны сжатия.

## § 7.2. Распространение ударной волны в направлении, перпендикулярном магнитному полю

Можно рассматривать ударные волны в произвольном относительно  $\mathbf{B}$  направлении. Однако ограничимся двумя крайними случаями, соответствующими распространению волн в параллельном и перпендикулярном к  $\mathbf{B}$  направлениям.

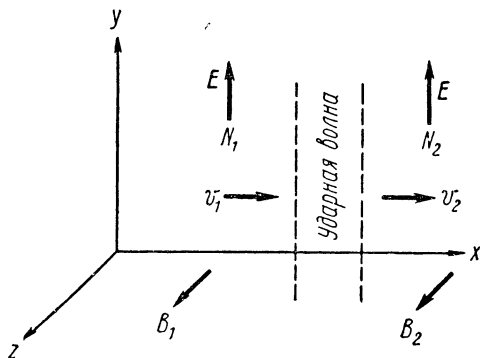


Рис. 7.2. Физические величины перед и за ударной волной, перпендикулярной к  $\mathbf{B}$ .

Можно выбрать еще и другую систему, в которой сама ударная волна неподвижна. Эту систему будем называть системой волны.

Система волны наиболее удобна для рассмотрения законов сохранения, и поэтому будем пользоваться в основном ею.

Пусть ударная волна ограничена двумя плоскостями, параллельными плоскости  $yOz$ , обозначенными на рис. 7.2 пунктирными линиями. Пусть далее скорость частиц, влетающих в область ударной волны, есть  $v_1$ , а покидающих ее —  $v_2$ , причем движение частиц происходит вдоль оси  $x$ . Магнитное поле будем считать направленным вдоль оси  $z$  и принимающим значения  $B_1$  и  $B_2$  соответственно на передней и задней границах ударной волны.

Для того чтобы частицы имели возможность двигаться поперек магнитного поля, должно существовать электрическое поле в направлении оси  $y$ .

В этом параграфе будет рассмотрен только последний случай.

В общем случае можно рассматривать движение ударной волны в первоначально покоящейся среде. Даже если среда в начальный момент не находится в покое, можно выбрать такую систему, в которой она будет покоиться. Будем называть такую систему лабораторной системой координат.

Из уравнения Максвелла, содержащего  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ , получаем

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}.$$

Интегрируя это уравнение, найдем

$$E_2 - E_1 = -\frac{1}{c} \frac{d\varphi}{dt},$$

где  $E_1$  и  $E_2$  — значения напряженности электрического поля перед и за фронтом ударной волны, а  $\varphi$  — магнитный поток в области, занимаемой ударной волной. Если предположить, что ударная волна все время ограничена двумя плоскостями, то магнитный поток  $\varphi$  не может монотонно нарастать со временем, а должен изменяться в ограниченных пределах вокруг некоторого среднего значения. Тогда в среднем будем иметь

$$E_2 = E_1,$$

и, таким образом, электрическое поле в среднем по обе стороны ударной волны имеет одинаковые значения. Напряжённость среднего электрического поля обозначим просто через  $E$ . Флуктуаций поля, которые лишь приводят к образованию шлейфа магнитогидродинамических волн, в области за ударной волной учитывать не будем. Чтобы последовательно рассмотреть флуктуационные поля, необходимо знать структуру ударной волны.

Скорости  $v_1$  и  $v_2$  — очевидно, скорости электрического дрейфа:

$$v_1 = c \frac{E}{B_1}, \quad v_2 = c \frac{E}{B_2}.$$

Заметим, что преобразование к лабораторной системе координат, в которой  $v_1 = 0$ , приводит к обращению электрического поля в области перед ударной волной в нуль. Отношение скоростей обратно пропорционально краевым значениям магнитного поля:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{B_2}{B_1},$$

или

$$v_1 B_1^2 = v_2 B_2^2. \quad (7.1)$$



Если  $N_1$  и  $N_2$  — плотности частиц впереди фронта и за ним, то из уравнения сохранения числа частиц следует

$$N_1 v_1 = N_2 v_2, \quad \text{или} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{N_2}{N_1}. \quad (7.2)$$

Уравнения (7.1) и (7.2) показывают, что плотности частиц и напряженности магнитного поля меняются в одинаковом отношении.

Для поддержания разных значений магнитного поля по обе стороны ударной волны в ее слое должен существовать ток, направленный вдоль оси  $y$ . Из уравнения Максвелла, содержащего  $\operatorname{rot} \mathbf{B}$ , следует

$$-\frac{\partial B}{\partial x} = 4\pi j_y, \quad \text{или} \quad -(B_2 - B_1) = 4\pi \int j_y dx. \quad (7.3)$$

Этот ток должен образовываться в результате эффектов, подобных току намагничивания и градиентного тока адиабатического метода ларморовских орбит. Однако, как мы увидим, адиабатическая теория в данном случае неприменима. Детальное объяснение механизма возникновения тока  $j_y$  может быть сделано только на основе теории строения ударной волны.

Воспользуемся теперь законом сохранения импульса. Поскольку рассматривается статический (в среднем) случай, то с помощью уравнения (1.28) находим

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (P_{ij} + T_{ij}) = 0,$$

где индексам соответствуют слагающие по осям  $x, y$  и  $z$ . Так как наша задача плоская, в этом уравнении остаются только производные по  $x$ . Интегрируя его, получаем

$$(P_{ix} + T_{ix})_1 = (P_{ix} + T_{ix})_2, \quad (7.4)$$

т. е. полный импульс (включая электромагнитный) перед волной должен равняться импульсу за волной.

Тензор потока импульса частиц  $P_{ix}$  диагонален, т. е.  $P_{ix} = 0$  для  $i \neq x$ , а

$$\left. \begin{aligned} P_{xx}(1) &= N_1 m v_1^2 + N_1 \omega_{\perp 1}; \\ P_{xx}(2) &= N_2 m v_2^2 + N_2 \omega_{\perp 2}; \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

где  $v_1$  и  $v_2$  — уже введенные скорости дрейфа, а  $\omega_{\perp}$  — энергия ларморовского движения. Тензор натяжений электромагнитного поля в рассматриваемом случае также оказывается диагональным, поэтому

$$T_{xx} = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) \approx \frac{1}{8\pi} B^2. \quad (7.6)$$

Поскольку  $E^2 = \frac{v^2}{c^2} B^2$ , членом с  $E^2$  в выражении (7.6) можно пренебречь для ударных волн, скорость движения которых меньше  $c$ .

Обозначим для краткости

$$\frac{B^2}{8\pi} + N\omega_{\perp} = p; \quad Nm = \rho, \quad (7.7)$$

где  $p$  — поперечное давление, включающее и магнитное давление, а  $\rho$  — плотность массы. Подставив уравнения (7.5) и (7.6) в уравнение (7.4), находим

$$\rho_1 v_1^2 + p_1 = \rho_2 v_2^2 + p_2.$$

С помощью закона сохранения массы

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \quad (7.8)$$

последнее уравнение можно переписать в виде

$$\rho_1 v_1 (v_1 - v_2) = p_2 - p_1. \quad (7.9)$$

Полученное равенство представляет обычный закон сохранения импульса для ударных волн, за тем исключением, что в общее давление входит и магнитное давление.

Наконец, используем закон сохранения энергии. Согласно уравнениям (1.44) и (1.45), для статического случая сохранение энергии выражается уравнением

$$\operatorname{div}(\mathbf{Q} + \mathbf{S}) = 0,$$

где  $\mathbf{Q}$  — вектор потока энергии частиц, а  $\mathbf{S}$  — вектор Пойнтинга. Учитывая, что для статического случая только производные по  $x$  не равны нулю, имеем

$$(Q_x + S_x)_1 = (Q_x + S_x)_2. \quad (7.10)$$

Выразим  $\mathbf{Q}$  согласно равенству (1.43), в котором, очевидно, все скорости обращаются в нуль, кроме  $\overline{v_x}$  (т. е.  $v_1$  и  $v_2$  для нашего случая).

Величинам  $\delta v_i$  соответствуют скорости ларморовского движения, наложенного на дрейф со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ , а также компоненты тепловой скорости в направлении, параллельном  $\mathbf{V}$ . Средние величины, фигурирующие в уравнении (1.43'), будут тогда равны

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} m \overline{\delta v^2} &= \omega_{\perp} + \omega_{\parallel}; \\ \overline{m \delta v_j \delta v_x} &= 0 \quad \text{для } j \neq x; \\ \overline{m \delta v_x \delta v_x} &= \omega_{\perp}; \\ \overline{\delta v^2 \delta v_x} &= 0. \end{aligned} \quad (7.11)$$

При получении этих результатов мы пользовались тем, что  $\delta v_x$  для каждой частицы меняется во времени по синусоидальному закону,  $\delta v_y$  — по косинусоидальному, а  $\delta v_z$  постоянно. Предположим также, что фазы частиц распределены случайно, в силу чего среднее по времени для одной частицы равно среднему по совокупности частиц в любой момент времени. Используя последние выражения, получим

$$Q_x = \frac{1}{2} \rho v^3 + Nv(2\omega_{\perp} + \omega_{\parallel}). \quad (7.12)$$

Так как  $v$  — скорость электрического дрейфа, компонента вектора Пойнтинга вдоль оси  $x$  равна

$$S_x = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{B}]_x = v \frac{B^2}{4\pi}. \quad (7.13)$$

Внося выражения (7.12) и (7.13) в уравнение (7.10), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho_1 v_1^3 + N_1 v_1 (2\omega_{\perp} + \omega_{\parallel})_1 + \frac{v_1 B_1^2}{4\pi} = \\ = \frac{1}{2} \rho_2 v_2^3 + N_2 v_2 (2\omega_{\perp} + \omega_{\parallel})_2 + \frac{v_2 B_2^2}{4\pi}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Перечислим неизвестные величины и уравнения для их определения.

Во-первых, можно рассматривать как заданные физические величины перед фронтом волны:  $N_1$ ,  $B_1$ ,  $\omega_{\perp}(1)$  и  $\omega_{\parallel}(1)$  [давление  $p_1$  выражается через перечисленные величины с помощью уравнения (7.7)]. Давление за ударной

волной  $p_2$  также может считаться заданным. Остающиеся величины  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $N_2$ ,  $B_2$ ,  $\omega_{\perp}(2)$  и  $\omega_{\parallel}(2)$  должны быть определены из уравнений (7.1), (7.2), (7.9), (7.14) и (7.7). Таким образом, для шести неизвестных имеется только пять уравнений, причем все уравнения сохранения уже использованы. Очевидно, необходимо найти еще одно уравнение.

Для обычных газов, у которых частота столкновений высока, можно положить

$$\omega_{\parallel} = \frac{1}{2} \omega_{\perp}. \quad (7.15)$$

В высокотемпературной плазме, где частота столкновений мала, условие (7.15) будет выполняться только для больших расстояний за фронтом и может служить дополнительным уравнением. Если мы, однако, заинтересованы в величинах непосредственно за фронтом ударной волны, то указанное условие нельзя считать справедливым ввиду малой частоты столкновений. Для случая плоских ударных волн можно считать, наоборот, что  $\omega_{\parallel}$  при переходе через фронт не меняет своего значения:

$$\omega_{\parallel}(1) = \omega_{\parallel}(2). \quad (7.16)$$

Условие (7.16) может рассматриваться как второе альтернативное уравнение, необходимое для полноты нашей системы. Необходимо, однако, принимать во внимание, что, пока детальная структура ударной волны неизвестна, у нас нет гарантии в том, что она не носит так называемого зернистого характера в плоскости  $xOy$ , и, следовательно,  $\omega_{\parallel}$  также может изменять свое значение при переходе через фронт волны. Однако пока остается предполагать, что одно из уравнений (7.15) и (7.16) справедливо.

До сих пор рассуждения велись так, как если бы имели дело только с одним типом частиц. В действительности в плазме есть как ионы, так и электроны. Можно легко убедиться в том, что перечисленные уравнения применимы, если под  $N$  понимать полную плотность частиц обоих типов, а  $\omega_{\perp}$  и  $\omega_{\parallel}$  означают средние энергии электронов и ионов. В давление и плотность тогда вносят вклад оба типа частиц. Приведенных уравнений по-прежнему оказывается достаточно для определения указанных средних величин, но недостаточно для вычисления электронных и ионных компонент  $\omega_{\perp}$  и  $\omega_{\parallel}$  за фронтом по отдельности.

Важный вопрос о неодинаковом нагреве ионов и электронов в ударной волне может быть рассмотрен только с помощью теории строения ударной волны.

Плоская задача в отсутствие столкновений. Если предположить, что задача плоская и воспользоваться уравнением (7.16), то члены с  $\omega_{\parallel}$  выпадают из уравнения (7.14). Тогда с помощью уравнения (7.8) результат можно представить в виде

$$\frac{1}{2} \rho_1 v_1 (v_1^2 - v_2^2) + 2(v_1 p_1 - v_2 p_2) = 0.$$

Преобразуя первый член в этом равенстве с помощью уравнения (7.9), получим

$$(p_2 - p_1)(v_1 + v_2) + 4(v_1 p_1 - v_2 p_2) = 0.$$

Деля на произведение  $\rho_1 v_2$  и вводя отношение давлений

$$\xi = \frac{p_2}{p_1} \quad (7.17)$$

и коэффициент сжатия

$$\eta = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{B_2}{B_1}, \quad (7.18)$$

окончательно найдем

$$(\xi - 1)(\eta + 1) + 4(\eta - \xi) = 0.$$

Решение этого уравнения

$$\eta = (3\xi + 1)/(\xi + 3) \quad (7.19)$$

выражает коэффициент сжатия через отношение давлений. Если подставить этот результат в уравнение сохранения импульса (7.9), то можно найти скорость ударной волны (в лабораторной системе):

$$v_1 = \sqrt{\frac{3\xi + 1}{2\xi} \frac{p_2}{\rho_1}} = \sqrt{\frac{(3\xi + 1) p_1}{2\rho_1}}. \quad (7.20)$$

Если отношение давлений стремится к бесконечности, то  $\eta \rightarrow 3$ , а  $v_1 \rightarrow \sqrt{(3/2)(p_2/\rho_1)}$ . Таким образом, сжатие плазмы ограничено, скорость же ударной волны может быть как угодно большой при достаточно высоких значениях  $p_2$ . При стремлении отношения давлений к единице, коэффициент сжатия также стремится к единице, а ско-

рость ударной волны — к  $\sqrt{2\rho_1/\rho_1}$ . Эта величина совпадает со скоростью обычных магнитогидродинамических волн, рассмотренных в гл. 6. Таким образом, скорость ударной волны всегда больше, чем магнитогидродинамической.

Интересно также подсчитать отношение энергии ларморовского движения впереди фронта и за ним. На основе определения величины давления (7.7) и только что полученных результатов можно показать, что

$$\frac{\omega_{\perp}(2)}{\omega_{\perp}(1)} = \eta + \frac{(\xi - 1)^3}{(\xi + 3)(3\xi + 1)} \left( 1 + \frac{B_1^2}{8\pi N_1 \omega_{\perp}(1)} \right). \quad (7.21)$$

Как уже было показано, для медленного адиабатического сжатия  $\omega_{\perp} \sim B$ . Отсюда следует, что  $\omega_{\perp}(2)/\omega_{\perp}(1) = B_2/B_1 = \eta$ . Таким образом, согласно выражению (7.21), можно сделать заключение, что в ударной волне энергия ларморовского движения увеличивается по сравнению со случаем адиабатического сжатия, причем при  $\xi \rightarrow 1$  это дополнительное нагревание исчезает.

Учет столкновений. Если при столкновениях происходит равномерное перераспределение энергии по степеням свободы, то в дополнение к уравнениям сохранения необходимо использовать уравнение (7.15). Алгебраические вычисления, несколько более сложные на этот раз, при условии сохранения прежних обозначений приводят к квадратному уравнению для  $\eta$

$$\eta^2 + \eta [(3 + \xi)(1 + \beta_1) + \beta_1] - (4\xi + 1)(1 + \beta_1) = 0. \quad (7.22)$$

Причем, естественно, должно быть взято положительное решение.

В этом уравнении

$$\beta_1 = \frac{8\pi N_1 \omega_{\perp}(1)}{B_1^2}. \quad (7.23)$$

Тогда скорость ударной волны равна

$$v_1 = \sqrt{\frac{\eta}{\gamma_1 - 1} \frac{\xi - 1}{\xi} \frac{\rho_2}{\rho_1}}. \quad (7.24)$$

Для  $\eta$  и  $v_1$  существуют следующие предельные переходы:

$$\text{при } \xi \rightarrow \infty \quad \eta \rightarrow 4, \quad v_1 \rightarrow \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\rho_2}{\rho_1}};$$

$$\text{при } \xi \rightarrow 1 \quad \eta \rightarrow 1, \quad v_1 \rightarrow \sqrt{\frac{6 + 5\beta_1}{3(1 + \beta_1)} \frac{\rho}{\rho_1}}.$$

В последнем случае, если еще  $\beta_1 = 0$ , то  $v_1 = \sqrt{2\rho/\rho}$ , т. е. скорость ударной волны равна скорости звука для  $\gamma = 2$ , соответствующей наличию магнитного поля. При очень больших значениях  $\beta_1$  (магнитное поле ничтожно)  $v_1 \rightarrow \sqrt{(5/3)(\rho/\rho)}$ , что соответствует  $\gamma = 5/3$ , т. е. случаю одноатомного газа.

### § 7.3. Распространение ударной волны в направлении, параллельном магнитному полю

Существует два типа ударных волн, распространяющихся вдоль поля  $\mathbf{B}$ , т. е. таких, у которых плоскость фронта перпендикулярна вектору  $\mathbf{B}$ . Для первого типа магнитное поле не играет никакой роли. Это обычные ударные волны в газе, на которые магнитное поле в направлении их движения не оказывает никакого влияния. Как хорошо известно, структура таких волн тесно связана с соударениями частиц, в силу которых осуществляется перераспределение энергии по степеням свободы. Поведение этих волн может быть описано формулами предыдущего параграфа (случай 2), если положить  $\beta_1 \rightarrow \infty$ . Тогда из уравнения (7.22) коэффициент сжатия будет равен

$$\eta = \frac{4\xi + 1}{4 + \xi}, \quad (7.25)$$

а скорость ударной волны

$$v_1 = \sqrt{\frac{4\xi + 1}{3\xi} \frac{\rho_2}{\rho_1}}. \quad (7.26)$$

В формуле (7.26) давление имеет чисто кинетический характер и не должно содержать вклада, обусловленного магнитным полем.

Для второго типа ударных волн роль магнитного поля существенна. Перед фронтом волны магнитное поле пер-

пендикулярно к поверхности фронта, но при переходе через фронт направление поля меняется и за фронтом составляет некоторый угол с нормалью к фронту, как показано на рис. 7.3. На этом рисунке ударная волна представлена в системе отсчета, связанной с ней самой. Поскольку  $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$ , компонента  $\mathbf{V}$  вдоль оси  $x$ , которую обозначим  $V_1$ , не меняется при переходе через фронт ударной волны. За фронтом поле имеет еще и компоненту  $V_0$  вдоль оси  $y$ . Эта компонента связана с наличием в ударной волне тока  $\mathbf{j}$  в направлении оси  $z$ .

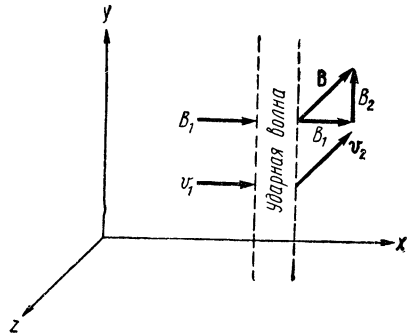


Рис. 7.3. Физические величины перед и за ударной волной, параллельной  $\mathbf{V}$ .

В системе отсчета, связанной с ударной волной, компоненты электрического поля вдоль осей  $y$  и  $x$  впереди волны должны равняться нулю, ибо в противном случае скорость  $v_1$  не была бы направлена точно по оси  $x$ . Более того, поскольку в среднем  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$  (в силу предположений § 7.2), эти же компоненты поля равны нулю и за фронтом. Более того, так как любое электрическое поле, направленное вдоль  $\mathbf{V}$ , может быть легко нейтрализовано перераспределением электрического тока, электрическое поле вообще отсутствует. Отсюда следует, что скорость  $v_2$  за фронтом ударной волны должна быть направлена вдоль  $\mathbf{V}$ . Силы, необходимые для отклонения частиц, пересекающих фронт ударной волны, определяются величиной  $[\mathbf{j}\mathbf{V}]$ , где  $\mathbf{j}$  — ток, текущий вдоль фронта волны.

Запишем уравнения сохранения для рассматриваемого случая. Сохранение массы выражается равенством

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_{2x}, \quad (7.27)$$

где  $\rho$  — плотность массы, а  $v_{2x}$  — компонента  $v_2$  вдоль оси  $x$ . Параллельность  $v_2$  и  $\mathbf{V}$  за фронтом выражается уравнением

$$\frac{v_{2x}}{v_{2y}} = \frac{B_1}{B_2}. \quad (7.28)$$



Следующие два уравнения описывают сохранение импульса:

$$\begin{aligned}(P_{xx} + T_{xx})_1 &= (P_{xx} + T_{xx})_2, \\ (P_{yx} + T_{yx})_1 &= (P_{yx} + T_{yx})_2\end{aligned}\quad (7.29)$$

(компоненты  $P_{zx}$  и  $T_{zx}$  обращаются в нуль).

Согласно уравнению (1.26), имеем для магнитного поля

$$\begin{aligned}T_{xx}(1) &= -\frac{B_1^2}{8\pi}; \quad T_{yx}(1) = 0; \\ T_{xx}(2) &= \frac{1}{8\pi}(B_2^2 - B_1^2), \quad T_{yx}(2) = -\frac{1}{4\pi}B_1B_2.\end{aligned}$$

Как и в § 7.2, необходимо ввести предположение о соотношении  $\omega_{\perp}$  и  $\omega_{\parallel}$ . Здесь, однако, нельзя утверждать, что при отсутствии столкновений величина  $\omega_{\parallel}$  остается постоянной, поскольку направление поля  $\mathbf{B}$  меняется при переходе через фронт ударной волны. Отношение величин  $\omega_{\perp}$  и  $\omega_{\parallel}$  может быть установлено только с помощью теории структуры ударной волны. Так как мы не располагаем такой теорией, можно положить, что  $\omega_{\perp} = 2\omega_{\parallel}$ , т. е.  $\rho_{\perp} = \rho_{\parallel} = \rho$  как впереди, так и позади фронта. Тензор потока импульса окончательно может быть записан в виде

$$\begin{aligned}P_{xx}(1) &= \rho_1 v_1^2 + p_1; \quad P_{yx}(1) = 0; \\ P_{xx}(2) &= \rho_2 v_{2x}^2 + p_2; \quad P_{yx}(2) = \rho_2 v_{2y} v_{2x}.\end{aligned}$$

В этих уравнениях  $\rho_1$  и  $\rho_2$  соответствуют только кинетическому и не содержат магнитного давления. Преобразуя уравнения (7.29) с учетом приведенных выражений, получаем

$$-\frac{B_1^2}{8\pi} + \rho_1 v_1^2 + p_1 = \rho_2 v_{2x}^2 + p_2 + \frac{B_2^2}{8\pi} - \frac{B_1^2}{8\pi} \quad (7.30)$$

и

$$\rho_2 v_{2x} v_{2y} - \frac{B_1 B_2}{4\pi} = 0. \quad (7.31)$$

Вектор потока энергии (вектор Пойнтинга) равен нулю для данного случая, так как поле  $E$  равно нулю. Поэтому закон сохранения энергии имеет вид

$$Q_x(1) = Q_x(2).$$

Путем вычислений, аналогичных тем, которые приводят к уравнению (7.12), получим

$$\frac{1}{2} \rho_1 v_1^3 + \frac{5}{2} \rho_1 v_1 = \frac{1}{2} \rho_2 v_{2x} (v_{2x}^2 + v_{2y}^2) + \frac{5}{2} \rho_2 v_{2x}. \quad (7.32)$$

Величины  $\rho_1, \rho_2, B_1$  и

$$p_2 + \frac{B_2^2}{8\pi} = P_2 \quad (7.33)$$

можно считать заданными. Определению подлежат величины  $v_1, v_{2x}, v_{2y}, \rho_2$  и  $p_2$  или  $B_2$ . Для определения пяти величин существует пять уравнений: (7.27), (7.28), (7.30), (7.31) и (7.32). Решение этой системы можно получить следующим образом. Из уравнений (7.28) и (7.31) находим

$$\rho_2 v_{2x}^2 = \frac{B_1^2}{4\pi}. \quad (7.34)$$

Подставив равенства (7.34) и (7.33) в уравнение (7.30), найдем скорость ударной волны

$$v_1 = \sqrt{\frac{P_2 - p_1 + \frac{B_1^2}{4\pi}}{\rho_1}}. \quad (7.35)$$

Отметим, что для слабой ударной волны, когда  $P_2 \rightarrow p_1$ , эта скорость соответствует магнитогидродинамическим волнам, рассмотренным в § 6.5 (случай 2).

Используя уравнения (7.27) и (7.34), получим также

$$\frac{B_1^2}{4\pi} = \frac{(\rho_2 v_{2x})^2}{\rho_2} = \frac{(\rho_1 v_1)^2}{\rho_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \rho_1 v_1^2.$$

Исключая отсюда с помощью (7.35) член  $\rho_1 v_1^2$ , находим коэффициент сжатия

$$\eta = \frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 + \frac{4\pi}{B_1^2} (P_2 - p_1). \quad (7.36)$$

Для слабых ударных волн этот коэффициент становится равным единице. Создается впечатление, что, согласно уравнению (7.36), коэффициент сжатия может принимать сколь угодно большие значения при увеличении  $P_2$ . Однако

еще не было использовано уравнение сохранения энергии (7.32). Исключив из этого уравнения  $v_{2y}^2$  с помощью уравнения (7.28), затем  $v_{2x}^2$  с помощью уравнения (7.34) и  $v_{2x}'$  — с помощью уравнения (7.27) и, наконец, деля на  $v_1$ , получим

$$\rho_1 v_1^2 + 5p_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \left[ \frac{B_1^2}{4\pi} + \frac{B_2^2}{4\pi} + 5p_2 \right].$$

Используем далее уравнения (7.35), (7.33) и (7.36) соответственно для исключения  $\rho_1 v_1^2$ ,  $p_2$  и  $P_2$  из последнего выражения. Тогда можно найти выражение для  $B_2^2$  как функцию коэффициента сжатия  $\eta$ :

$$\frac{3}{8\pi} B_2^2 = (\eta - 1) \left[ (4 - \eta) \frac{B_1^2}{4\pi} - 5p_1 \right]. \quad (7.37)$$

Для достаточно больших значений  $\eta$  правая часть выражения (7.37) становится отрицательной. Следовательно, для этих значений решение, соответствующее рис. 7.3, отсутствует. Наибольшее значение  $\eta$ , для которого оно еще существует, равно

$$\eta = 4 - 20\pi \frac{p_1}{B_1^2}. \quad (7.38)$$

Поскольку  $\eta$  не может быть меньше единицы, ударная волна в рассматриваемом случае отсутствует, если

$$20\pi \frac{p_1}{B_1^2} > 3, \quad \text{или} \quad p_1 > \frac{6}{5} \frac{B_1^2}{8\pi}. \quad (7.39)$$

Наибольшей допустимой величине  $\eta$  соответствует, согласно уравнению (7.36), наибольшее давление  $P_2$ . При давлениях, больших этой величины, образуется ударная волна (см. начало настоящего параграфа).

#### **§ 7.4. Структура магнитогиродинамической ударной волны. Случай слабой ударной волны**

В изучении структуры фронта ударных магнитогиродинамических волн получены некоторые результаты для того случая, когда направление распространения ударной волны параллельно **B**.

Не будем сначала принимать во внимание влияние столкновений. С точки зрения газодинамики кажется, что тогда нельзя вообще говорить о каких-либо ударных волнах, поскольку в отсутствие столкновений не может увеличиваться энтропия, а в ударной волне энтропия всегда должна возрасть. Однако доказательство последнего утверждения основано на предположении о стационарности условий за фронтом ударной волны. Такое предположение не соответствует действительности, так как ударные волны в рассматриваемом случае генерируют колебания в плазме.

Энергия этих колебаний играет роль внутренней, так что избыточная энергия (по отношению к энергии адиабатического сжатия) может перейти в энергию этих колебаний. Соотношения, приведенные в § 7.2, справедливы лишь для величин, полученных путем усреднения по периоду колебаний. При этом энергия колебаний учитывается в давлении. Наличие энергии колебаний вовсе не означает увеличения энтропии в строгом термодинамическом смысле, поскольку эта энергия не связана с хаотическим движением частиц. Действительно, энергия этих колебаний может быть извлечена обратно в полном согласии с термодинамикой, т. е. без передачи тепла от горячих тел к холодным. Однако, когда под влиянием столкновений колебания в конце концов затухают и макроскопические условия становятся стационарными, энтропия увеличивается на вполне определенную величину.

Как установлено в § 7.1, крутизна переднего фронта волн сжатия нарастает до того момента, когда начинают играть роль неадиабатические эффекты. В частности, когда частоты в системе координат частиц, движущихся навстречу волне, превышают ларморовскую частоту, развитая в гл. 2 адиабатическая теория становится несправедливой. В этом случае энергия  $\omega_{\perp}$  уже не будет пропорциональна  $B$ . Так как ларморовская частота для ионов много меньше, чем для электронов, можно ожидать, что, хотя движение ионов приобретает неадиабатический характер, электроны будут еще двигаться адиабатически. Попытаемся положить это предположение в основу нашего анализа.

Если характер движения ионов и электронов различен, то образующееся в силу этого разделение зарядов вызовет появление электрических полей, которые будут действовать в направлении нейтрализации образующихся заря-

дов. Уже при самом незначительном разделении зарядов возникают очень сильные электрические поля. Поэтому сделаем упрощающее предположение о том, что электрические силы играют главную роль в движении ионов и что, следовательно, действием магнитного поля на них можно пренебречь.

Пусть магнитное поле направлено по оси  $z$ , как показано на рис. 7.4, а плазма движется вдоль оси  $x$ . Перейдем к системе отсчета, связанной с волной. В этой системе

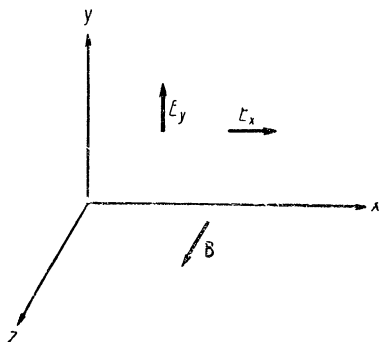


Рис. 7.4. Ориентация полей в слабой ударной волне.

существует электрическое поле, направленное по оси  $y$ , которое будет вызывать дрейф электронов по оси  $x$  со скоростью

$$v_x = c \frac{E_y}{B}. \quad (7.40)$$

Поле  $E_y$  удовлетворяет уравнению Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{или}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (7.41)$$

Ранее предполагалось, что ударная волна плоская, т. е. физические условия не зависят от координат  $y$  и  $z$ . Если исключить с помощью уравнения (7.40)  $E_y$  из уравнения (7.41), можно получить

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Bv_x) = 0. \quad (7.42)$$

Сравнение этого уравнения с уравнением сохранения числа электронов

$$\frac{\partial N_-}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (N_- v_x) = 0$$

показывает, что плотность электронов изменяется аналогично величине  $B$ . Тогда если предположить, что перед волной значения  $N_-$  и  $B$  постоянны и равны  $N_0$  и  $B_0$  соответственно, то

$$\frac{N_-}{B} = \text{const} \quad \text{или} \quad N_- = \frac{N_0}{B_0} B. \quad (7.43)$$

При разделении зарядов возникает электрическое поле, направленное вдоль оси  $x$ . Это поле заставляет электроны дрейфовать в направлении оси  $y$  и приводит к току

$$j_y = -\frac{N_- e v_y}{c} = \frac{N_- e}{c} c \frac{E_x}{B} = \frac{N_0 e}{B_0} E_x = -\frac{N_0 e}{B_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (7.44)$$

где  $e$  считается положительной величиной, а также введен потенциал  $\varphi$ , градиент которого с отрицательным знаком равен  $E_x$ . Согласно предположению о независимости движения ионов от магнитного поля, пренебрежем вкладом ионов в ток  $j_y$ . Тогда уравнение Максвелла, содержащее  $\text{rot } \mathbf{B}$ , приобретает вид

$$-\frac{\partial B}{\partial x} = 4\pi j_y = \frac{4\pi N_0 e}{B_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (7.45)$$

В последнем уравнении током смещения пренебрегаем, точно так же не учитываем диэлектрический эффект электронов при написании уравнений (7.40) и (7.44). Справедливость этих предположений будет проверена позже.

Если принять  $\varphi = 0$  впереди фронта ударной волны, то интегрирование уравнения (7.45) дает

$$B(x, t) - B_0 = \frac{4\pi N_0 e}{B_0} \varphi(x, t). \quad (7.46)$$

Потенциал  $\varphi$  удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -4\pi e (N_+ - N_-) = -4\pi e N_0 \left[ \left( \frac{N_+}{N_0} - 1 \right) - \left( \frac{N_-}{N_0} - 1 \right) \right],$$

где  $N_+$  — плотность ионов. Далее, так как

$$\frac{N_-}{N_0} - 1 = \frac{B}{B_0} - 1,$$

можно с помощью уравнения (7.46) написать окончательно

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \left( \frac{4\pi N_0 e}{B_0} \right)^2 \varphi = -4\pi N_0 e \left( \frac{N_+}{N_0} - 1 \right). \quad (7.47)$$

Для большего удобства перепишем это уравнение в безразмерном виде, введя следующие единицы:

$$\text{единица длины} - \frac{B_0}{4\pi N_0 e} = \lambda; \quad (7.48)$$

$$\text{единица потенциала} - B_0 \lambda,$$

$$\frac{N_+}{N_0} = \mathfrak{N}_+.$$

Обозначив новые единицы опять  $x$  и  $\varphi$ , получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \varphi = 1 - \mathfrak{N}_+. \quad (7.49)$$

Обратимся теперь к уравнениям движения для ионов. Как сказано выше, действием магнитного поля на ионы пренебрегаем. Одновременно пренебрежем и действием сил, вызванных компонентой  $E_y$ , поскольку эти силы вызывают дрейф частиц в направлении оси  $x$ , т. е. поперек магнитного поля. При пренебрежении действием магнитного поля на ионы они могут самостоятельно двигаться в том же направлении (вдоль оси  $x$ ) без помощи компоненты  $E_y$ . Если  $u$  — скорость иона в направлении оси  $x$ , то

$$M \frac{du}{dt} = -e \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Используя в этом уравнении введенные безразмерные единицы, а также единицу времени

$$\tau = \sqrt{\frac{M}{4\pi N_0 e^2}}, \quad (7.50)$$

можно записать уравнение движения ионов в виде

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (7.51)$$

Единицей скорости в этом уравнении является величина

$$\frac{\lambda}{\tau} = \sqrt{\frac{B_0^2}{4\pi N_0 M}}, \quad (7.52)$$

равная скорости магнитогидродинамических волн, рассмотренных в гл. 4, для которых кинетическое давление много меньше магнитного.

Уравнение движения (7.51) для каждого иона должно быть решено совместно с уравнением Пуассона (7.49) для потенциала  $\varphi$ . Плотность  $\mathfrak{N}_+(x, t)$  можно найти подсчетом числа частиц, приходящихся на единицу длины в момент  $t$  в окрестности точки  $x$ . Таким образом, это типичная проблема многих тел для одного измерения, точное решение которой практически невозможно. Можно несколько упростить задачу, предположив, что скорости всех ионов, находящихся в данной точке, одинаковы, т. е. отсутствует разброс скоростей, что, другими словами, означает — ионная температура близка к нулю. В таком случае уравнение (7.51) можно рассматривать как газодинамическое уравнение Эйлера, где скорость  $u(x, t)$  есть функция не только  $t$ , но и  $x$ . Производная по времени от этой скорости тогда равна

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (7.53)$$

а плотность ионов должна удовлетворять уравнению сохранения

$$\frac{\partial \mathfrak{N}_+}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\mathfrak{N}_+ u) = 0. \quad (7.54)$$

Система уравнений (7.49), (7.51), (7.53) и (7.54) весьма похожа на уравнение обычной газодинамики, где роль давления играет  $\varphi$ . При этом роль уравнения состояния играет дифференциальное уравнение (7.49).

Можно легко показать, что эти уравнения допускают решения в виде волн малой амплитуды, распространяющихся со скоростью, определяемой выражением (7.52) в том случае, когда длина волны больше единицы длины, определяемой выражением (7.48). Таким образом, в линейном приближении уравнения имеют разумное решение. Однако нас интересует характер решений большой амплитуды.

До сих пор не найдено решений этих уравнений, подобных, скажем, простым волнам (волнам Римана) обычной газодинамики. Можно, однако, попытаться получить некоторую информацию, ограничиваясь только стационарными решениями, т. е. зависящими в системе волны только от



координаты  $x$ . При таких предположениях уравнение (7.51) приобретает вид

$$u \frac{du}{dx} = -\frac{d\varphi}{dx}.$$

Его решение, очевидно, сводится к следующему

$$\frac{u^2}{2} + \varphi = \text{const} = \frac{u_0^2}{2}, \quad (7.55)$$

где  $u_0$  — скорость перед фронтом волны, или, что то же самое, скорость волны со знаком минус в лабораторной системе. Решая уравнение (7.54), получим

$$\mathfrak{R}_+ u = \text{const} = u_0,$$

поскольку  $\mathfrak{R}_+ = 1$  перед фронтом волны. Поэтому

$$\mathfrak{R}_+ = \frac{u_0}{u} = \frac{u_0}{\sqrt{u_0^2 - 2\varphi}}. \quad (7.56)$$

Подставляя эти соотношения в уравнение (7.49), находим

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 1 + \varphi - \frac{u_0}{\sqrt{u_0^2 - 2\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \varphi + \frac{\varphi^2}{2} + u_0 \sqrt{u_0^2 - 2\varphi} \right]. \quad (7.57)$$

Это уравнение подобно уравнению движения частицы (если под  $\varphi$  подразумевать ее координату, а под  $x$  — время) в поле с потенциалом

$$V(\varphi) = - \left[ \varphi + \frac{\varphi^2}{2} + u_0 \sqrt{u_0^2 - 2\varphi} \right]. \quad (7.58)$$

Как в эквивалентной задаче механики, решение уравнения (7.57) можно качественно исследовать, исходя из зависимости  $V(\varphi)$ .

При  $\varphi = 0$   $V(\varphi) = -u_0^2$ . Первая производная  $dV/d\varphi$  при  $\varphi = 0$  обращается в нуль. Вторая производная там же равна

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{u_0^2} - 1. \quad (7.59)$$

Следовательно, если  $u_0 < 1$ , кривизна кривой  $V$  имеет положительное значение и величина  $\varphi$  колеблется вокруг

$\varphi = 0$ . Подобные решения представляют как бы след волны, сохраняющей свою амплитуду постоянной. Они, естественно, не описывают собственно ударную волну.

При  $u_0 > 1$  кривизна  $V$  для  $\varphi = 0$  становится отрицательной. В этом случае форма кривой имеет вид, изображенный на рис. 7.5. Для значений  $\varphi < 0$   $V$  монотонно увеличивается по отрицательной величине. Для положительных  $\varphi$   $V$  сначала убывает, достигает минимума, а затем растет. Кривая обрывается при  $\varphi = u_0^2/2$ , где подкоренное выражение становится отрицательным и, следовательно, скорость  $u$  — мнимой.

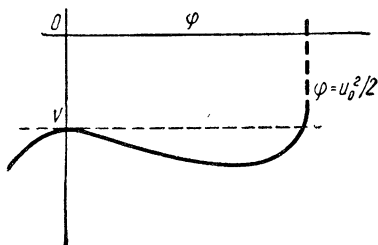


Рис. 7.5. Эквивалентный потенциал для уравнения ударной волны.

Решение уравнения (7.57) должно содержать постоянную интегрирования, аналогичную полной энергии в эквивалентной механической задаче. В интересующих нас решениях эта константа должна равняться  $V(0)$  (рис. 7.5, горизонтальная пунктирная линия). Таким образом, решение, начинающееся при  $\varphi = 0$ , сначала экспоненциально возрастает, затем как бы отражается от про-

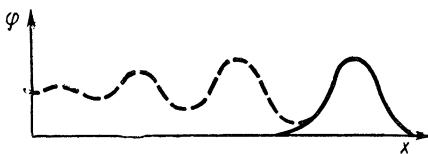


Рис. 7.6. Периодические и затухающие колебания потенциала.

тивоположного «склона» потенциальной ямы и возвращается к начальному состоянию опять при  $\varphi = 0$ . Это решение представляет сверхзвуковые импульсы (рис. 7.6, сплошная линия). Но это еще не ударная волна. Однако если допустить существование небольшого числа столкновений между ионами и электронами, то «колебательное движение» функции  $\varphi$  станет затухающим. Ее значения будут осциллировать вокруг точки минимума  $V(\varphi)$  и в кон-

це концов сосредоточатся в непосредственной близости от нее. Подобная структура уже соответствует ударной волне. Необходимо при этом отметить, что при наличии столкновений, вызывающих тепловой разброс, наши уравнения становятся менее строгими, так как мы положили в их основу монохроматичность ионов по скоростям. Поэтому минимум потенциала не будет точно соответствовать уплотнению ударной волны. Однако ясно, что ударная волна генерирует колебания плазмы, затухающие под влиянием столкновений. Если затухание на самом деле вызывается столкновениями, электроны и ионы приобретают в равной степени энергию, диссипируемую в ударной волне.

Существует и другая возможная причина затухания колебаний. Если ударная волна образуется перед некоторым поршнем (расстояние от поршня до нее меньше расстояния, на котором волны успевают затухнуть из-за столкновений), то волны, отражающиеся от поршня, будут сталкиваться с волнами, идущими от ударной волны. В результате в области между поршнем и волной возникают нестационарные «бурлящие» движения плазмы. (Численные расчеты подтверждают это предположение.)

Можно ли уподобить эти нестационарные движения бурунам в воде, возникающим там, где есть препятствия ее потоку? Вопрос этот в действительности не такой наивный, как может показаться на первый взгляд. Согласно уравнению (7.49), потенциал между двумя источниками типа дельта-функций при их сближении не стремится к бесконечной величине. Поэтому нет причин для того, чтобы различные элементы плазмы не могли проникать друг в друга, разрушая при этом первоначальную упорядоченность своего движения. Если подобные ситуации могут иметь место, то энергия колебаний может постепенно переходить в хаотическое движение многих групп ионов. При этом ионы получают энергию, диссипируемую в ударной волне, в то время как электроны сохраняют свое адиабатическое движение. Однако еще не известно, проявляется ли подобный механизм в действительности.

Следует отметить, что теория, развитая выше, применима все же для не очень больших амплитуд ударной волны. Это связано с тем, что при  $u_0 > 2$  (т. е. если скорость ударной волны превышает вдвое скорость волн малой амплитуды) кривая «потенциальной функции»  $V(\varphi)$  обрывается ниже точки ее начала. При этом  $\varphi$  стремится к зна-

чениям, большим, чем начальная кинетическая энергия  $u_0^2/2$ , и решение теряет смысл.

Следует еще проверить предположения, сделанные при выводе этой теории. Одно из них заключалось в том, что получающиеся частоты должны быть меньше ларморовской частоты электронов. Поскольку частота колебаний по порядку равна обратной величине единицы времени (7.50), должно соблюдаться неравенство

$$\frac{eB_0}{mc} > \sqrt{\frac{4\pi N_0 e^2}{M}},$$

или

$$\frac{m}{M} \left( \frac{4\pi N_0 mc^2}{B_0^2} \right) < 1.$$

Однако поскольку диэлектрическими эффектами, вызываемыми присутствием электронов, пренебрегалось, вклад электронов в диэлектрическую постоянную мал, т. е.

$$\frac{4\pi N_0 mc^2}{B_0^2} < 1. \quad (7.60)$$

Это условие, очевидно, более сильное, чем первое.

Наконец, проверим справедливость пренебрежения действием магнитных сил на ионы. Это предположение, очевидно, будет разумным, если частота колебаний больше ларморовской, т. е.

$$\frac{4\pi N_0 Mc^2}{B_0^2} > 1. \quad (7.61)$$

Таким образом, вклад ионов в величину диэлектрической постоянной должен быть большим. Очевидно, существует область значений  $N_0/B_0^2$ , где удовлетворяются оба условия: (7.60) и (7.61).

## § 7.5. Модель поперечной ударной волны

Если принять, что энергия, рассеиваемая в ударной волне, идет на образование колебаний, связанных с ней, то можно построить более детальный механизм ударной волны. Подобное рассмотрение было проведено для удар-

ных волн, распространяющихся перпендикулярно направлению магнитного поля\*.

В двух словах колебательный механизм ударной волны можно представить следующим образом. Будем считать, что колебания возникают в области за ударной волной. Некоторые из волн, создаваемых этими колебаниями, проникают и в область самой ударной волны. Здесь их энергия возрастает в результате сжатия. Таким образом, в ударной волне происходит усиление колебаний, причем достаточное для поддержания колебаний в области за фронтом. Образующиеся в результате этого механизма волны имеют довольно большую амплитуду. Поэтому благодаря нелинейному характеру взаимодействия их энергия постепенно передается все более коротковолновым колебаниям. Энергия волн играет, таким образом, роль внутренней энергии в законах сохранения.

Если только эти волны не сносятся немедленно в область, расположенную далеко за фронтом ударной волны, то, очевидно, их скорость по отношению к плазме должна быть того же порядка, что и скорость ударной волны, т. е. равной или несколько большей альфвеновской скорости. Поскольку низкочастотные альфвеновские волны имеют групповую скорость, равную альфвеновской, они могут играть роль только для крайне слабых ударных волн. Волнам с групповой скоростью, превышающей альфвеновскую, должны соответствовать частоты по крайней мере порядка ларморовской частоты ионов  $\omega_i$ , для которых метод орбит несправедлив.

Как было установлено в § 7.1, крутизна фронта адиабатических волн сжатия постепенно возрастает. Разумно предположить, что ширина фронта ударной волны перестает уменьшаться при достижении наибольшего значения, для которого уже неадиабатические эффекты в состоянии обеспечить выполнение законов сохранения. Это означает, что частота (в системе координат, связанной с плазмой) должна быть наименьшей, допускающей существование заметных адиабатических эффектов. Естественно обратить внимание на ларморовскую частоту ионов.

Будем считать, что ударная волна движется сквозь первоначальную холодную плазму, находящуюся во внеш-

---

\* В этом параграфе излагаются результаты работы F. F i s h e r et al. Rev. Mod. Phys. 32, 959 (1960).

нем магнитном поле  $\mathbf{B}_{\text{ВН}}$ , направленном перпендикулярно скорости ударной волны. Альфвеновская скорость  $V_a$  перед фронтом ударной волны имеет значение

$$V_a = \sqrt{\frac{B_{\text{ВН}}^2}{4\pi NM}}. \quad (7.62)$$

Пусть скорость ударной волны равна

$$V_s = \mathfrak{M}V_a. \quad (7.63)$$

Число  $\mathfrak{M}$  мы назовем числом Маха для ударной волны.

На передней грани ударной волны возникающие возмущения возбуждают волны в холодной плазме, групповая скорость которых должна равняться  $V_a$ . Какие из волн с частотой порядка  $\omega_i$  могут иметь такую групповую скорость?

Естественно прежде всего обратиться к волнам, рассмотренным в § 6.7, у которых  $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_{\text{ВН}}$ . Предположим для простоты, что

$$\omega_e \ll \omega_p. \quad (7.64)$$

Тогда, согласно выражениям (6.99) и (6.97), дисперсионное уравнение для таких волн дает

$$k \approx \sqrt{\frac{4\pi NM}{B_{\text{ВН}}^2}} \frac{\omega}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_i \omega_e}}} = \frac{1}{V_a} \frac{\omega}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_i \omega_e}}}.$$

Поскольку  $dk/d\omega \geq 1/V_a$  для  $\omega < \sqrt{\omega_i \omega_e}$ , их групповая скорость

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \leq V_a.$$

Отсюда видно, что подобные волны нас не устраивают. Главная причина заключается том, что  $\varepsilon$  в этом случае есть возрастающая функция  $|\omega|$ .

Из графика рис. 6.5 видно, что в случае, когда  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_{\text{ВН}}$ , для отрицательных и малых по абсолютной величине значений  $\omega$   $\varepsilon$  — убывающая функция  $|\omega|$ . Групповая скорость таких волн больше  $V_a$ . Однако она направлена по  $\mathbf{B}_{\text{ВН}}$ , т. е. перпендикулярна скорости ударной волны, в силу чего эти волны также не могут оказаться полезными. Попробуем воспользоваться косыми волнами, рассмотрен-

ными в § 6.9, для которых существует дисперсионное соотношение (6.106). При

$$\omega^2 \ll \omega_i \omega_e \quad \text{и} \quad \omega_e \ll \omega_p \quad (7.65)$$

это соотношение значительно упрощается, сводясь к равенству нулю членов в квадратных скобках. Из уравнений (6.94) и (6.95) в том же приближении следует

$$1 + \gamma\alpha \approx \frac{\varepsilon_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_i^2}}, \quad \gamma\beta \approx \frac{\omega}{\omega_i} \frac{\varepsilon_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_i^2}},$$

где

$$\varepsilon_0 \approx \frac{4\pi N M c^2}{B_{\text{ВН}}^2}.$$

Окончательно дисперсионное соотношение приобретает вид

$$\omega^4 - \omega^2 \left[ V_a^2 (k_x^2 + 2k_z^2) + \frac{V_a^4}{\omega_i^2} (k_x^2 + k_z^2) k_z^2 \right] + V_a^4 (k_x^2 + k_z^2) k_z^2 = 0, \quad (7.66)$$

где  $k_z$  — компонента вектора  $\mathbf{k}$ , параллельная  $\mathbf{B}_{\text{ВН}}$ , а  $k_x$  — его компонента в направлении движения ударной волны. Мы не будем решать приведенное уравнение точно, а ограничимся случаем, когда

$$\frac{k^2 V_a^2}{\omega_i^2} \gg 1. \quad (7.67)$$

Справедливость этого предположения докажем впоследствии. Для такого случая приближенное решение уравнения (7.66) имеет вид

$$\omega \approx \pm \frac{V_a^2}{\omega_i} k_z \sqrt{k_x^2 + k_z^2}. \quad (7.68)$$

Групповая скорость в перпендикулярном фронту ударной волны направлении будет равна

$$v_{gx} = \frac{d\omega}{dk_x} \approx \pm \frac{V_a^2}{\omega_i} \frac{k_x k_z}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}}. \quad (7.69)$$

При заданной абсолютной величине  $k$  она максимальна тогда, когда  $k_x = k_z$ , т. е. когда вектор  $\mathbf{k}$ , делит угол между  $\mathbf{V}_{\text{вн}}$  и скоростью ударной волны пополам. Это максимальное значение групповой скорости равно

$$v_{gx \text{ макс}} \approx \frac{1}{2} V_a \left( \frac{V_a k}{\omega_i} \right). \quad (7.70)$$

Таким образом, эта групповая скорость может стать как угодно большой с ростом величины  $V_a k / \omega_i$  в сравнении с альфвеновской скоростью. Для сильных ударных волн со скоростью, во много раз превосходящей  $V_a$ , предположение (7.67), естественно, выполняется. Можно показать, что другие решения уравнения (7.66) не приводят к групповой скорости, большей  $V_a$ .

Если приравнять максимальную групповую скорость скорости ударной волны и использовать равенство (7.63), то найдем

$$\frac{1}{k} \approx \frac{1}{2M} \frac{V_a}{\omega_i} = \frac{1}{2M} \sqrt{\frac{Mc^2}{4\pi N e^2}}. \quad (7.71)$$

Выражение под корнем представляет собой квадрат ларморовского радиуса иона, движущегося с альфвеновской скоростью. Можно считать, что даваемое этим соотношением значение  $1/k$  соответствует длине волны основного (наинизшего) колебания, создаваемого ударной волной. Поэтому можно предположить, что ширина фронта ударной волны будет соизмерима с  $1/k$ , что, кажется, соответствует данным эксперимента\*.

Теория, развитая в § 7.4, совершенно не учитывает действия магнитного поля на ионы в отличие от рассуждений настоящего параграфа. Можно ожидать, что ширина фронта ударной волны, вычисленная в этом параграфе, окажется больше полученной в § 7.4, поскольку там пренебрегалось некоторыми эффектами, позволяющими неадиабатическому механизму проявиться при более низких частотах, т. е. при больших ширинах фронта ударной волны. В этом параграфе ширина фронта по порядку

\* См. сноску на стр. 188.



равна  $1/k$ , тогда как в § 7.4 она определялась выражением (7.48). Их отношение равно

$$\frac{\lambda}{k} = \frac{1}{2\mathfrak{M}} \sqrt{\frac{4\pi N M c^2}{B^2}}.$$

Поскольку справедливость теории, развитой в § 7.4, была ограничена условием  $\mathfrak{M} < 2$  и так как диэлектрическая постоянная ионов (величина под корнем) считалась большой, ширина  $1/k$  действительно больше, чем выведенная в § 7.4. Исходя из гипотезы о том, что ширина ударных волн сжатия должна быть наибольшей, можно заключить, что последняя модель ближе к действительности.

Однако изложенная теория не является общепризнанной и существуют другие подходы к этой задаче. Читатель может познакомиться с ними в работах, упоминаемых в списке литературы.

## СТОЛКНОВЕНИЯ ЧАСТИЦ

### § 8.1. Введение

До сих пор мы игнорировали дискретную природу электрических зарядов и токов, рассматривая их, а следовательно, и электромагнитные поля как непрерывные функции пространственных координат. По существу мы оперировали в некотором смысле средними значениями напряженностей полей.

Причина такого приближенного рассмотрения достаточно очевидна. Задача точного расчета состояния плазмы — проблема многих тел, и, конечно, нет никакой надежды решить ее точно.

Силы, действующие на некоторую частицу, зависят от координат всех других частиц в данный момент, а если учитывать запаздывание, то и от их значений в предшествующие моменты времени. В приближении непрерывного поля удастся свести эту сложную взаимозависимость частиц к проблеме решения уравнений движения для одной частицы в усредненных полях.

В этой главе мы попытаемся выяснить, какие явления ускользают от рассмотрения в таком приближении, и оценить их влияние. Назовем эти явления «эффектами столкновений», хотя усредненные силы, действующие на частицу, также являются проявлением как бы столкновений частицы со всеми остальными частицами одновременно.

### § 8.2. Флуктуации в нейтральной плазме

Рассмотрим сначала простейший случай нейтральной плазмы без магнитного поля. Под словом «нейтральная» подразумевается такая плазма, в больших объемах кото-

рой число положительных и отрицательных частиц равно. В таком случае можно утверждать, что среднее электрическое поле в этой плазме в том смысле, в котором оно определялось в предшествующих главах, равно нулю. Однако в малых объемах число частиц того или ионного знака испытывает флуктуации, и нейтральность будет выполняться только при условии усреднения либо по времени, либо по пространству.

Рассмотрим малый элемент объема  $\delta V$  и подсчитаем вероятность  $P(n, m)$  того, что в нем содержится  $n$  электронов и  $m$  ионов (ионы предполагаются однозарядными).

Если пренебречь взаимодействием частиц, то вероятность нахождения в элементе  $\delta V$   $n$  электронов будет определяться распределением Пуассона

$$P(n) = a^n \frac{e^{-a}}{n!}, \quad (8.1)$$

которое должно быть нормировано так, чтобы

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1. \quad (8.2)$$

Среднее число электронов тогда будет равно

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} nP(n) &= e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{na^n}{n!} = e^{-a} a \frac{d}{da} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = \\ &= e^{-a} a \frac{d}{da} (e^{-a}) = a. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Поэтому параметр  $a$  следует выбрать таким образом, чтобы

$$a = N\delta V, \quad (8.4)$$

где  $N$  — среднее число электронов в единице объема.

При пренебрежении силами взаимодействия  $P(n, m)$  можно рассматривать просто как произведение двух распределений Пуассона

$$P_0(n, m) = e^{-2a} \frac{a^{n+m}}{n! m!}. \quad (8.5)$$

Из этого выражения следует, конечно, что средний заряд, пропорциональный  $(m-n)$ , обращается в нуль, и можно считать, что среднее электрическое поле также равно нулю.

Среднее значение  $(m-n)^2$  равно

$$\overline{(m-n)^2} = \overline{m^2} + \overline{n^2} - 2\overline{mn}. \quad (8.6)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \overline{m^2} = \overline{n^2} &= e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 a^n}{n!} = \\ &= e^{-a} a \frac{d}{da} a \frac{d}{da} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = a(a+1) \end{aligned} \quad (8.7)$$

и

$$\overline{m \cdot n} = \overline{m} \cdot \overline{n} = a^2. \quad (8.8)$$

Поэтому среднеквадратичный избыток числа одних частиц над другими будет равен

$$\overline{(m-n)^2} = 2a. \quad (8.9)$$

Напомним, что это выражение справедливо при пренебрежении силами взаимодействия. Более высокие моменты  $(m-n)$  могут быть вычислены аналогичным путем.

Рассмотрим теперь влияние кулоновского взаимодействия частиц на их распределение. Это рассмотрение будет приближенным, однако для большинства целей оно вполне достаточно. Вероятность  $P_0(n, m)$ , даваемая выражением (8.5), представляет априорную вероятность того, что в объеме  $\delta V$  содержится  $n$  электронов и  $m$  ионов. При этом не учитывается потенциальная энергия их взаимодействия. Естественно,  $n$  электронов и  $m$  ионов могут быть распределены в объеме  $\delta V$  любым образом. Предположим для определенности, что объем  $\delta V$  — сферический с радиусом  $r$ , а избыточный заряд весь сосредоточен на его поверхности. Тогда потенциальная энергия такого заряда определяется как

$$V(n, m) = \frac{1}{2} e^2 (m-n)^2 / r.$$

Поскольку для данного радиуса и суммарного заряда эта величина представляет наименьшее значение потенциаль-

ной энергии, будем считать, что она на самом деле несколько больше. Положим, что она больше в 1,5 раза, т. е.

$$V(n, m) = \frac{3}{4} e^2 (m - n)/r. \quad (8.10)$$

Это, конечно, лишь догадка, но она нас вполне устроит\*.

Если учесть потенциальную энергию, то априорная вероятность должна быть умножена на  $\exp(-V/kT)$ , и

$$P_{\downarrow}(n, m) = A e^{-2a} \frac{a^{n+m}}{n! m!} e^{-\frac{V(n, m)}{kT}}. \quad (8.11)$$

В этом выражении постоянную  $A$  нужно определить из условия нормировки

$$\sum_{n, m} P_{\downarrow}(n, m) = 1. \quad (8.12)$$

Для того чтобы исследовать выражение для  $P(n, m)$  более подробно, аппроксимируем факториалы согласно формуле Стirlingа

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}. \quad (8.13)$$

Поскольку ошибка при такой аппроксимации пропорциональна  $(12n)^{-1}$ , то в случае больших  $n$  эта аппроксимация очень точна. Однако даже для  $n \sim 1$  представление Стirlingа может быть применимо.

Используя это представление, получим

$$e^{-a} \frac{a^n}{n!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{a}{n}\right)^n e^{(n-a)}. \quad (8.14)$$

Последние два сомножителя зависят от  $n$  значительно сильнее, чем  $\sqrt{n}$ . Пусть

$$f(n) = \left(\frac{a}{n}\right)^n e^{(n-a)}.$$

Разложив эту функцию вокруг точки, в которой она имеет максимум и перейдя к логарифмам, находим

$$\ln f = n \ln a - n \ln n + n - a$$

и

$$\frac{d}{dn} (\ln f) = \ln a - \ln f.$$

---

\* Множитель  $3/2$  получается при усреднении величины  $1/r$  по объему.

Максимум  $f$ , таким образом, расположен в точке  $n = a$ . В этой точке

$$\ln f|_n = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dn} \ln f = 0.$$

Вторая и третья производные в той же точке равны

$$\frac{d^2}{dn^2} \ln f = -\frac{1}{a}, \quad \frac{d^3}{dn^3} \ln f = \frac{1}{a^2}.$$

Поэтому разложение  $f$  вокруг точки  $n = a$  имеет вид

$$f = \exp \left\{ -\frac{(n-a)^2}{2a} + \frac{1}{6} \frac{(n-a)^3}{a^2} \right\}.$$

Первый член в скобках существен при  $n - a \approx \sqrt{a}$ . Второй член в этой точке меньше первого в  $1/3\sqrt{a}$  раза. Поэтому если величина  $a$  (которая окажется опять равной среднему числу электронов или ионов в объеме  $\delta V$ ) велика, то вторым членом можно пренебречь. Тогда распределение Пуассона (8.14) превращается в распределение Гаусса

$$\frac{e^{-a} a^n}{n!} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{(n-a)^2}{2a}}. \quad (8.15)$$

Здесь  $\sqrt{n}$  заменен  $\sqrt{a}$ , поскольку  $\sqrt{n}$  меняется медленно по сравнению с экспоненциальной функцией.

Используя эти упрощения, можно переписать выражение для вероятности  $P(n, m)$  (8.11) следующим образом:

$$P(n, m) = \frac{A}{2\pi a} \exp \left\{ -\frac{(n-a)^2}{2a} - \frac{(m-a)^2}{2a} - \frac{3}{4} \frac{e^2 (m-n)^2}{rkT} \right\}.$$

Поскольку в последнем члене экспоненты фигурирует  $(m-n)^2$ , удобнее вместо  $m$  и  $n$  использовать  $m-n$  и  $m+n$ . Проводя преобразование, получим

$$P(n, m) = \frac{A}{2\pi a} \exp \left\{ -\frac{(m+n-2a)^2}{4a} - \frac{(m-n)^2}{4a} - \frac{3}{4} \frac{e^2 (m-n)^2}{rkT} \right\}. \quad (8.16)$$

Из этой формулы следует, что среднее значение  $m+n$  равно  $2a$ , а  $m-n$  — нулю. Поэтому средние значе-

ния  $m$  и  $n$  равны  $a$ , в силу чего  $a$  опять определяется по формуле (8.11).

Два последних члена в экспоненте выражения (8.16) пропорциональны  $(m - n)^2$ . Сравним относительное значение этих двух членов. Они имеют одинаковое значение для

$$a = \frac{1}{3} \frac{rkT}{e^2}$$

или, согласно (8.11),

$$N \frac{4\pi}{3} r^3 = \frac{1}{3} \frac{rkT}{e^2}.$$

Следовательно, эти два члена играют одинаковую роль, если радиус элемента объема равен

$$r = \sqrt{\frac{kT}{4\pi N e^2}} = \lambda_D. \quad (8.17)$$

Это расстояние носит название дебаевского радиуса и обозначается обычно  $\lambda_D$ .

Если радиус  $r$  несколько меньше  $\lambda_D$ , член, соответствующий потенциальной энергии в экспоненте выражения (8.16), становится несущественным (так как  $a \sim r^3$ ). Для таких объемов число электронов и число ионов по существу никак не коррелируют друг с другом, несмотря на учет потенциальной энергии их взаимодействия. Однако для объемов радиуса, несколько большего  $\lambda_D$ , потенциальная энергия начинает играть существенную роль, в результате чего флуктуации величины  $(m - n)$  уменьшаются в  $\lambda_D/r$  раз по сравнению со случаем, когда взаимодействием электронов и ионов пренебрегается.

Проведенное рассмотрение становится несправедливым, когда число частиц в сфере дебаевского радиуса становится малым, например порядка 1. Это связано, во-первых, с тем, что в таком случае приближенное представление распределения Пуассона становится неточным. Во-вторых, наша оценка величины потенциальной энергии взаимодействия не учитывала по существу дискретной природы электрических зарядов, которая оказывается существенной для малого числа частиц. Условием справедливости использованного приближения поэтому может служить неравенство

$$\frac{4\pi}{3} \lambda_D^3 N \gg 1$$

или с учетом определения  $\lambda_D$

$$\frac{kT}{N^{1/3} e^2} \gg (36\pi)^{1/3} \approx 5. \quad (8.18)$$

Поскольку  $N^{1/3}$  — величина, обратная среднему расстоянию между частицами, величина  $N^{1/3} e^2$  равна средней потенциальной энергии взаимодействия двух соседних частиц. Таким образом, условие (8.18) заключается в том, чтобы величина  $kT$  была несколько больше средней потенциальной энергии взаимодействия соседних частиц.

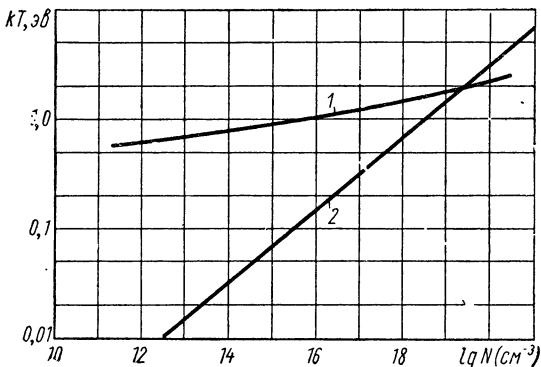


Рис. 8.1. 1 — 50% ионизации водорода; 2 — одна частица в сфере дебаевского радиуса.

На рис. 8.1 показана область, в которой выполняется условие (8.18). Например, для плотности  $N = 10^{18} \text{ э/см}^3$   $kT$  должно быть больше  $10^{-12} \text{ эрг}$ , или  $0,7 \text{ эв}$ . В случае меньших  $N$   $kT$  соответственно уменьшается. Так как нас обычно будут интересовать значительно бóльшие значения  $kT$  (килоэлектронвольт и более), а  $N$  — не большие чем  $10^{18} \text{ э/см}^3$ , то условие (8.18) будет всегда выполняться.

Помимо этого надо отметить, что приведенная выше температура в  $0,7 \text{ эв}$  настолько низка, что водород с плотностью  $N = 10^{18} \text{ э/см}^3$  даже не будет ионизирован. Выясним, каково должно быть соотношение между  $N$  и  $kT$ , чтобы ионизировать водород на 50%. Относительная заселенность основных энергетических уровней водорода ( $E_0 = 13,6 \text{ эв}$ ) равна

$$P_g = e^{\frac{E_0}{kT}}.$$



Относительная заселенность свободных состояний, с другой стороны, определяется как

$$P_f = \frac{1}{h^3} \left( \frac{2}{N} \right) 4\pi \int_0^{\infty} e^{-\frac{p^2}{2mkT}} p^2 dp = \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \left( \frac{mkT}{h^2} \right)^{3/2} \frac{1}{N},$$

где  $2/N$  — объем, приходящийся на один электрон, при условии, что газ на 50% ионизован. При 50%-ной ионизации  $P_g$  и  $P_f$  должны быть равны друг другу\*, поэтому

$$N = \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \left( \frac{mkT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{E_0}{kT}} = \frac{1}{4\pi^{3/2}} \frac{1}{a_0^3} \left( \frac{kT}{E_0} \right)^{3/2} e^{-\frac{E_0}{kT}}. \quad (8.19)$$

В этом выражении был введен борковский радиус  $a_0 = 0,53 \cdot 10^{-8}$  см. Область, соответствующая степени ионизации, большей чем 50%, также изображена на рис. 8.1. (Ввиду экспоненциальной зависимости  $P_g$  от энергии ионизации с ростом температуры быстро достигает 100%.)

Мы видим, что в области интересующих нас значений плотности частиц ионизация прекращается раньше, чем нарушается условие (8.18).

### § 8.3. Экранирование электрических зарядов в плазме

Дебаевская длина играет важную роль еще в одной проблеме, тесно связанной с только что рассмотренными флуктуациями. Предположим, что в плазму помещен электрод, находящийся по отношению к плазме под некоторым потенциалом. Каково будет распределение потенциала вокруг этого электрода? Будем по-прежнему считать, что магнитное поле отсутствует и заряженные частицы движутся только под действием электрического поля.

Ответ на поставленный вопрос в сильной степени зависит от того, что происходит с электронами после их удара об электрод.

Будем предполагать для простоты, что при этом происходит идеальное отражение электронов от поверхности электрода. Именно в этом случае плазма достигает тепло-

\* На возбужденные, но связанные состояния приходится лишь малая доля всех электронов.

вого равновесия. Тогда плотности ионов и электронов имеют вид

$$N_+ = Ne^{-\frac{e\varphi}{kT}}; \tag{8.20}$$

$$N_- = Ne^{\frac{e\varphi}{kT}}.$$

В этих выражениях использовался одинаковый постоянный коэффициент  $N$  для ионов и электронов. Это не уменьшает общности рассуждений, так как если в начальный момент эти коэффициенты не равны, то выбором произвольной постоянной у потенциала можно всегда их сделать равными. В частности, потенциал  $\varphi$  был выбран таким образом, чтобы он обращался в нуль при равных плотностях ионов и электронов.

Уравнение Пуассона, если ограничиться плоским слоем, будет иметь вид

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 8\pi Ne \operatorname{sh} \frac{e\varphi}{kT}. \tag{8.21}$$

С помощью подстановки

$$\psi = \frac{e\varphi}{kT}$$

и введения новой единицы длины

$$\lambda = \sqrt{\frac{kT}{8\pi Ne^2}} = \frac{\lambda_D}{\sqrt{2}} \tag{8.22}$$

это уравнение можно привести к безразмерному виду

$$\psi'' = \operatorname{sh} \psi.$$

В том случае, когда  $\psi$  меньше единицы и, следовательно,  $\operatorname{sh} \psi \approx \psi$ , решение уравнения (8.21) имеет вид

$$\psi \approx e^{\pm \frac{x}{\lambda}}. \tag{8.23}$$

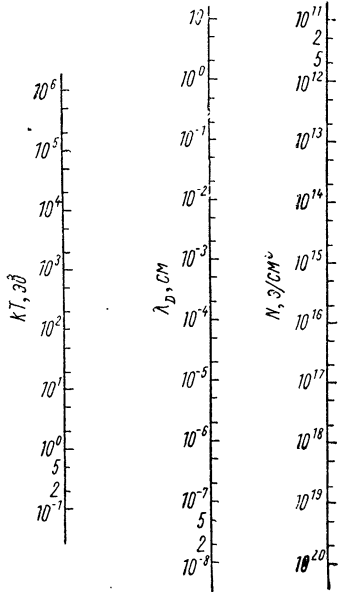


Рис. 8.2. Номограмма для определения дебаевского радиуса.

Для величин  $\psi$ , больших единицы, решение растёт или убывает ещё быстрее, чем экспоненциальная функция. Для слоя плазмы толщиной в несколько дебаевских радиусов решение, убывающее по мере увеличения расстояния до границы плазмы, очевидно, будет иметь вид (8.23). Таким образом, видно, что за счет образования вблизи электрода слоя пространственного заряда, который экранирует это поле, электростатическое поле проникает в плазму лишь на глубину порядка дебаевского радиуса.

Дебаевский радиус обычно весьма мал, как в этом можно убедиться из номограммы, приведенной на рис. 8.2.

#### § 8.4. Дебаевский радиус в неравновесной плазме

Рассуждения двух предшествующих параграфов были основаны на предположении о том, что плазма находится в состоянии теплового равновесия. Однако можно показать, что результаты, полученные при этом, имеют более общий характер.

Чтобы убедиться в этом, возвратимся к задаче о флуктуациях. Рассмотрим элемент объема радиусом  $r$  и предположим, что электроны в этом объеме и вблизи него в некоторый момент движутся таким образом, что если им предоставить возможность свободно двигаться и дальше, то в объеме создастся избыток заряда одного знака. Если средняя скорость электронов вблизи этого объема равна  $\bar{v}$ , то для этого потребуется время  $r/\bar{v}$ . Однако избыток заряда одного знака приводит к образованию электрического поля, противодействующего дальнейшему накоплению этого заряда. Время, за которое действие этого поля скажется на движении электронов, очевидно, соизмеримо с периодом плазменных колебаний  $\sqrt{m/4\pi Ne^2}$ . Если этот период меньше времени образования избытка заряда, то очевидно, что флуктуации будут эффективно подавляться кулоновскими силами. Радиус соответствующего элемента объема

$$r > \sqrt{\frac{m\bar{v}^2}{4\pi Ne^2}}.$$

Величина, стоящая справа, по существу есть дебаевский радиус, в котором температура заменена (с точностью до множителя порядка 1) средней энергией электронов.

Результаты § 8.3 также не ограничиваются только случаем распределения Максвелла — Больцмана. Наличие больцмановского коэффициента  $\exp(\pm e\varphi/kT)$  приводит к появлению в уравнении (8.21) члена  $\text{sh}(e\varphi/kT)$ . Однако конкретный вид этого члена не очень существен, поскольку многие другие виды распределения приводят для малых значений  $\varphi$  также к пропорциональности плотности величине  $e\varphi/\bar{T}$  (где  $\bar{T}$  — средняя кинетическая энергия) и, следовательно, к дебаевскому экранированию.

Сказанное, однако, не означает, что не может существовать распределений по скоростям, приводящим к прямо противоположным результатам. Например, монохроматический по скорости пучок частиц, попадая в область, где потенциальная энергия возрастает, может приводить к образованию там высокой плотности частиц за счет их замедления. В гл. 11 мы рассмотрим некоторые из таких аномальных распределений по скоростям, приводящих к образованию областей положительного и отрицательного заряда.

### § 8.5. Кулоновское рассеяние

В этом параграфе будут изложены некоторые основные сведения о рассеянии частиц в кулоновском поле, которые пригодятся нам в последующих главах.

Рассмотрим столкновение двух частиц с массами  $m_1$  и  $m_2$ , зарядами  $Z_1e$  и  $Z_2e$  ( $e$  — заряд протона, а  $Z_1$  и  $Z_2$  могут иметь любой знак), имеющих до столкновения скорости  $v_1$  и  $v_2$ . Задачу о таком столкновении проще всего рассматривать в системе центра масс частиц, используя относительную скорость и скорость центра масс, определяемые следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2; \\ V &= \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{M}, \end{aligned} \quad (8.24)$$

где  $M$  — полная масса, равная

$$M = m_1 + m_2. \quad (8.25)$$

Введем еще одну полезную величину — приведенную массу

$$m = \frac{m_1 m_2}{M}. \quad (8.26)$$

При преобразовании к системе центра масс соблюдается равенство

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M V^2, \quad (8.27)$$

в силу которого суммарная кинетическая энергия частиц равна сумме кинетической энергии относительного движения и кинетической энергии центра масс. Более того, если распределение по скоростям  $v_1$  и  $v_2$  максвелловское с одинаковой температурой, то распределение по скоростям  $v$  и  $V$  будет также максвелловским с той же самой температурой:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi^3} \left( \frac{m_1}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left( -\frac{m_1 v_1^2}{2kT} \right) \left( \frac{m_2}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left( -\frac{m_2 v_2^2}{2kT} \right) dv_1 dv_2 = \\ & = \frac{1}{\pi^3} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left( -\frac{m v^2}{2kT} \right) \left( \frac{M}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left( -\frac{M V^2}{2kT} \right) dv dV. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Следует отметить, что обе части этого равенства нормированы на единицу для каждого набора переменных.

Скорость центра масс  $V$  не изменяется при столкновении. Абсолютная величина относительной скорости также сохраняется постоянной, хотя ее направление изменяется. Обозначим относительную скорость после столкновения через  $v'$ . Вектор  $v'$  будем характеризовать углом  $\theta$  между ним и  $v$ , а также углом  $\varphi$  в плоскости, перпендикулярной  $v$ , как это изображено на рис. 8.3. Углы  $\theta$  и  $\varphi$  соответствуют обычным угловым координатам в полярной системе координат.

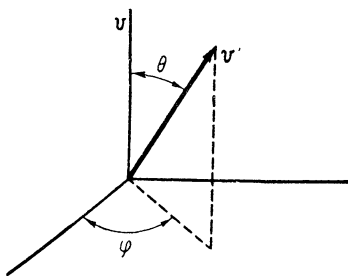


Рис. 8.3. Углы рассеяния.

Дифференциальное поперечное сечение рассеяния в единицу телесного угла дается формулой Резерфорда

$$\sigma(\theta, \varphi) = Z_1^2 Z_2^2 \frac{e^4}{4m^2 v^4} \left( \sin \frac{\theta}{2} \right)^{-4}, \quad (8.29)$$

в которой характеристики движения относятся к системе центра масс.

Часто возникает необходимость вычислить влияние столкновений на величины скоростей  $v_1$  и  $v_2$  в лабораторной системе координат. Для этого нужно использовать выражение, обратное (8.24), а именно:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= V + \frac{m_2}{M} v; \\ v_2 &= V - \frac{m_1}{M} v. \end{aligned} \right\} \quad (8.30)$$

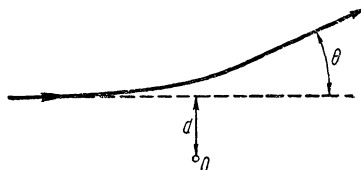


Рис. 8.4. Прицельное расстояние.

Обычно удобнее выразить по этим формулам все величины, относящиеся к системе центра масс, и затем провести интегрирование по переменным в этой системе.

Угол рассеяния  $\theta$  связан с прицельным параметром  $d$  (рис. 8.4). Большим прицельным параметрам соответствуют меньшие углы, поскольку кулоновский потенциал уменьшается с расстоянием. Асимптотическое соотношение между  $\theta$  и  $d$  можно получить, рассматривая траекторию рассеиваемой частицы в первом приближении как прямую (рис. 8.5) и вычисля импульс, передаваемый в перпендикулярном ей направлении. Угол рассеяния тогда будет равен отношению этого импульса к начальному импульсу частицы  $mv$ .

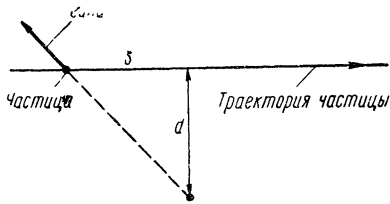


Рис. 8.5. Схема для приближенного расчета рассеяния на малый угол.

После простых вычислений можно получить

$$\theta \approx \frac{2Z_1 Z_2 e^2}{dmv^2}. \quad (8.31)$$

Следует отметить, что эта формула выведена без учета квантовых эффектов. Хотя квантовый метод расчета, как и классический, приводит к той же формуле для сечения рассеяния (8.29), в квантовой механике уже нельзя говорить о точной связи прицельного параметра с углом рассеяния. Согласно квантовым законам, если прицельный параметр равен или меньше  $d$ , неопределенность при расчете угла рассеяния будет равна

$$\delta\theta = \frac{\hbar}{mvd}. \quad (8.32)$$

В тех случаях, когда полученный классическим методом угол рассеяния (8.31) меньше величины  $\delta\theta$ , классический расчет неверен.

Критерий нарушения классического метода, таким образом, имеет вид

$$\frac{\theta_{\text{класс}}}{\delta\theta} = \frac{2Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} < 1. \quad (8.33)$$

Для электрон-электронных и электрон-протонных столкновений максимальная величина энергии относительного движения, выше которой классический метод не применим, составляет около 40 эв, тогда как для столкновений протона с протоном — около 40 кэв.

Поскольку для малых углов сечение  $\sigma(\theta)$  зависит от угла как  $\theta^{-4}$ , интегральное сечение рассеяния, получаемое интегрированием  $\sigma(\theta)$  по всем углам, расходится. Следует отметить, что даже умножение  $\sigma(\theta)$  на  $\theta$  или  $\theta^2$  не дает конечного результата (хотя более высокие моменты уже имеют конечную величину). Обращение этих величин в бесконечность означает, что они не могут иметь никакого физического смысла, поскольку правильно поставленные физические задачи всегда приводят к конечным результатам.

Появление расходящихся интегралов связано в частности со статистическим подходом к системе многих частиц, каковой является плазма. Не имея возможности точно учесть все бесчисленные акты столкновений, мы вынуждены вычислять только некоторые средние результаты. При этом оказывается, как мы увидим в следующих главах, что интерес представляют такие величины, которые ведут себя при малых  $\theta$  как  $\theta^2$ , т. е. по сути дела определяют среднеквадратичный угол рассеяния. Поскольку для малых углов выражение  $\sigma(\theta)\theta^2 \sin \theta d\theta$  ведет себя как  $d\theta/\theta$ , интегралы от таких величин при их строгом вычислении логарифмически расходятся. При статистическом подходе к столкновениям мы обязаны считать центры рассеяния распределенными в пространстве совершенно беспорядочно. Но, как было уже показано, координаты частиц только в достаточно малых объемах никак не коррелируют друг с другом. Поэтому статистический подход оправдан лишь для близких столкновений. При прицельных параметрах, больших дебаевского радиуса, рассеяние частиц ослабляется ввиду тенденции соответствующих объемов к электрической нейтральности, большей, чем допускает

чисто статистический подход. Такая корреляция, стремящаяся сохранить нейтральность, приводит к экспоненциальному убыванию эффективности парных столкновений для больших прицельных параметров, или, что одно и то же, при малых  $\theta$ . Поэтому в расчетах обычно используется просто формула Резерфорда, но интегрирование обрывается при некотором минимальном угле  $\theta_m$ , получающемся приравнением прицельного параметра дебаевского радиусу

$$\theta_m = \frac{2|Z_1 Z_2| e^2}{\lambda_D m v^2} \quad (8.34)$$

(классический случай).

В тех случаях, когда классическая формула (8.31) несправедлива, минимальный угол вычисляется из соотношения неопределенности (8.32):

$$\theta_m = \frac{\hbar}{m v \lambda_D} \quad (\text{квантовый случай}). \quad (8.35)$$

Вообще говоря, возможен более последовательный учет экранирования. Однако, поскольку  $\theta_m$  входит в окончательный результат под знаком логарифма, ошибка при изложенном методе не слишком значительна. На рис. 8.6 приведена номограмма для определения величины  $[-\ln(\theta_m/2)]^*$  по плотности и температуре, соответствующей кинетической энергии частиц. С помощью этой номограммы можно убедиться, что изменение расстояния обрезания интеграла в два раза меняет величину кулоновского логарифма незначительно.

Таким образом, корреляция в плазме предотвращает появление бесконечностей в расчетах. Поставим вопрос,

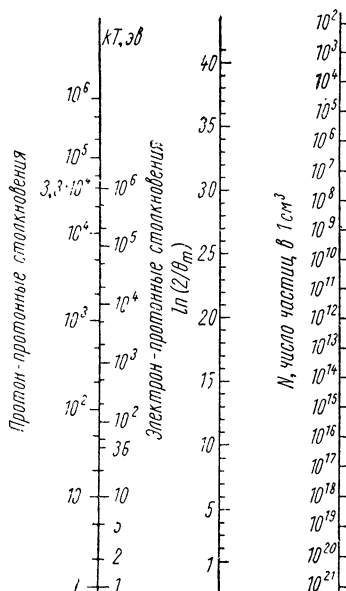


Рис. 8.6. Номограмма для определения величины  $\ln \frac{2}{\theta_m}$ .

\* Расчет электрон-электронных столкновений можно приближенно проводить, используя шкалу для электрон-протонных столкновений.



какой результат получится, если считать, что центры рассеяния распределены беспорядочно? Можно показать, что и в этом случае — результат будет бесконечным.

Формула Резерфорда описывает уже состоявшееся столкновение, где  $\theta$  — угол асимптоты траектории рассеиваемой частицы (на больших расстояниях). Далекие столкновения, приводящие к рассеянию на малые углы, происходят по сравнению с близкими за большее время. Для прицельных параметров, больших некоторого предельного значения, соответствующего времени  $\Delta t$  и по порядку равно  $v\Delta t$ , столкновения не успевают произойти за время  $\Delta t$ . При учете незавершенности столкновений рассеяние уменьшается, а зависимость сечения от угла приобретает вид  $1/\theta^3$  для любого конечного промежутка времени. Это обстоятельство и устраняет расходимость полного сечения. По сути дела максимальный прицельный параметр должен быть приравнен  $v\Delta t$ . В плазме, когда  $v\Delta t$  больше дебаевского радиуса (которым соответствует очень малым промежуткам времени), последний играет определяющую роль.

### § 8.6. Влияние магнитного поля

Ясно, что в тех случаях, когда ларморовский радиус больше дебаевского, наличие магнитного поля не повлияет существенно на результаты § 8.2 и 8.4. В подобных случаях частицы на расстояниях порядка дебаевского радиуса продолжают вести себя как свободные.

Отношение ларморовского и дебаевского радиусов равно

$$\frac{mv_{\perp} c}{eB} \sqrt{\frac{4\pi Ne^2}{kT}} \approx \sqrt{\frac{8\pi Nmc^2}{B^2}} = \sqrt{2\varepsilon_m}. \quad (8.36)$$

В этом выражении было принято равенство  $kT = \frac{1}{2}mv_{\perp}^2$ , что естественно для изотропного распределения. Мы видим, что ларморовский радиус больше дебаевского тогда, когда диэлектрическая постоянная плазмы велика.

В § 8.3 установили, что в отсутствие магнитного поля основная масса плазмы остается электрически нейтральной благодаря возможности перераспределения зарядов под действием сил, ими же создаваемыми. В магнитном поле, если при движении вдоль его силовых линий заряды не могут осуществить такое перераспределение, возможно

образование областей с отличным от нуля суммарным зарядом. Такой случай реализуется, например, в магнитном поле прямолинейного проводника с током, где избыточный заряд может заполнить тор, образуемый пучком магнитных силовых линий. Проблема флуктуаций при этом должна быть рассмотрена несколько по-иному. Легко представить, что происходит в данном случае. Состоянию, соответствующему минимальной электростатической энергии и одновременно совместимому с требованием, чтобы заряды двигались только вдоль силовых линий, отвечает равномерное распределение заряда вдоль магнитной силовой линии. Отклонения от этого среднего равномерного распределения плотности зарядов будут увеличивать энергию пропорционально квадрату отклонения этой плотности. Единственным расхождением с выводами § 8.2 является отличие средней плотности зарядов от нуля. Флуктуации плотности уменьшаются, когда размеры объема становятся больше дебаевского радиуса.

Теперь можно точнее определить понятие средней плотности заряда, часто нами употреблявшееся, следующим образом: средняя плотность равна суммарному заряду в объемах, больших дебаевских размеров, деленному на величину этого объема. Понятие средней плотности тока может быть установлено аналогично как произведение заряда и скорости. Средние поля определяются через средние плотности заряда и плотности токов. Поэтому необходимо потребовать, чтобы поля также не сильно менялись на протяжении дебаевского радиуса. При соблюдении этих условий усредненные уравнения движения будут вполне удовлетворительно описывать измерение во времени указанных средних величин. Естественно, усредненное влияние столкновений все равно должно учитываться в уравнениях движения для средних величин, однако, как убедились ранее, столкновения (т. е. взаимодействие частиц с прицельными параметрами, меньшими дебаевского радиуса) могут быть рассмотрены отдельно от далеких кулоновских взаимодействий, учитываемых при помощи усредненных полей.

В наших задачах ларморовский радиус обычно больше дебаевского для протонов, но не для электронов. Для электронов

$$\sqrt{2\varepsilon_m} \approx 5 \cdot 10^{-3} \frac{\sqrt{N}}{B}.$$

Таким образом, при  $B = 10^5$  гс и  $N$  менее  $4 \cdot 10^{14}$  частиц/см<sup>3</sup> ларморовский радиус меньше существенного значения прицельных параметров. В этом случае на столкновения с такими прицельными параметрами магнитное поле будет оказывать влияние. Можно предполагать, что при этом столкновения происходят адиабатически. Однако при столкновении электронов с электронами силы, с которыми они действуют друг на друга, будут осциллировать с электронной ларморовской частотой, и в результате этого могут проявиться некоторые неадиабатические резонансные эффекты. Подробный анализ этой задачи еще не проведен.

### § 8.7. Корреляция частиц

В этой главе мы затронули, правда в довольно элементарной степени, глубокую проблему физики плазмы — проблему корреляций. Существует строгий подход к этой проблеме, развитый первоначально для обычных газов независимо Боголюбовым \*, Борном и Грином\*\*, а также Кирквудом\*\*\* и примененный к плазме в основном Ростокером и Розенблатом\*\*\*\*. Этот метод основан на использовании уравнения Лиувилля для системы частиц, функция распределения которых зависит от координат и скоростей всех частиц системы. Эта функция обозначается через  $f_n(r_1 v_1, \dots, r_n, v_n)$ , где  $n$  — полное число частиц в системе. Если проинтегрировать эту функцию распределения по координатам и скоростям всех частиц, кроме одной, то получим функцию распределения для одной частицы, которая и была использована в нашем изложении. Если интегрирование распространяется на координаты и скорости всех частиц, кроме двух (трех и т. д.), то соответственно получается двухчастичная (трехчастичная и т. д.) функция распределения. В частности, двухчастичная функция распределения  $f_2(r_1, v_1, r_2, v_2)$  описывает корреляцию между двумя частицами.

\* Н. Н. Боголюбов. Проблемы динамической теории в статистической физике. М., Гостехиздат, 1946.

\*\* M. Born, H. S. Green. A general Kinetic theory of liquids. Cambridge University Press. (N. Y.), 1949.

\*\*\* J. G. Kirkwood. J. Chem. Phys., 15, 72 (1947).

\*\*\*\* N. Rostoker, M. Rosenbluth. Phys. Fluids, 3, 1 (1960); 5, 776 (1962); см. также M. Rostoker. Nucl. Fusion, 1, 101 (1961).

Уравнения для определения этих функций получаются путем интегрирования уравнения Лиувилля для  $n$  частиц по координатам и скоростям всех частиц, кроме одной, двух и т. д. Например, интегрирование уравнения Лиувилля по всем частицам, кроме одной, приводит к уравнению Лиувилля для одной частицы, отличающемуся от того, которым мы пользовались, дополнительным членом, содержащим функцию  $f_2$ . Этот член как раз учитывает рассеяние частиц 1 на частицах 2. Аналогично интегрирование уравнения Лиувилля для  $n$  частиц по всем частицам, кроме двух, приводит к уравнению Лиувилля для функции  $f_2$ , содержащему член с  $f_3$ , описывающий взаимодействие частиц 1 и 2 с частицами 3. И вообще уравнение Лиувилля для  $s$ -частиц содержит член с  $f_{s+1}$ .

Эту бесконечную систему уравнений в том случае, когда число частиц в объеме дебаевского радиуса велико, можно решать начиная с  $f_1$  методом разложения по малому параметру. При этом трехчастичная функция распределения с хорошей точностью может быть представлена в виде произведения двухчастичных функций распределения. Это по существу эквивалентно утверждению, что рассеяние частицы, взаимодействующей одновременно со всеми частицами в пределах дебаевского радиуса, может быть представлено как сумма парных столкновений. Причина этого, более подробно объясняемая в § 9.2, состоит в том, что углы при каждом отдельном акте рассеяния в основном крайне малы.

Используя описанный метод, можно провести строгий учет влияния столкновений, включая дебаевское экранирование. Получаемые при этом в первом приближении результаты совпадают с той несколько интуитивной трактовкой эффекта экранирования, которая приведена в этой и следующей главах. Для эффектов более высокого порядка, чем первый, строгая трактовка становится, по-видимому, более необходимой.

## ДИФфуЗИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ СКОРОСТЕЙ

### § 9.1. Введение

Первое последствие столкновений состоит в том, что изменяются скорости участвующих в них частиц, естественно, в границах, допускаемых законами сохранения энергии и импульса. Поэтому заданное в начальный момент распределение частиц по скоростям стремится под влиянием столкновений также измениться, или, как мы будем говорить, происходит диффузия в пространстве скоростей. В этой главе рассмотрим, как реализуется такая диффузия в тех случаях, когда функция распределения  $f$  не зависит от пространственных координат.

### § 9.2. Уравнение Больцмана

В § 1.8 было выведено уравнение Лиувилля для частиц, движущихся в заданных полях. Согласно соотношениям (1.55) и (1.56), уравнение Лиувилля можно записать следующим образом:

$$\frac{D}{Dt} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0, \quad (9.1)$$

где  $D/Dt$  — производная, взятая вдоль траектории частицы в фазовом пространстве. Таким образом, в отсутствие столкновений функция  $f$  в системе, связанной с частицей, постоянна. В этом и состоит теорема Лиувилля. Чтобы учесть столкновения, необходимо подсчитать вызываемое ими изменение функции распределения в единицу вре-

мени  $\left. \frac{df}{dt} \right|_c$ , называемое интегралом столкновений, и изменить уравнение (9.1) следующим образом:

$$\frac{D}{Dt} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_c. \quad (9.2)$$

Это уравнение Больцмана.

Уравнение (9.1) тоже часто называют уравнением Больцмана (без интеграла столкновений), однако мы для простоты называли его уравнением Лиувилля.

Поскольку точное положение и скорости частиц не известны, интеграл столкновений не может быть вычислен точно. Сведения о положении и скорости частиц содержатся в функции распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ , откуда можно получить только средние значения физических величин. (Средние либо по малым объемам и промежуткам времени, либо по ансамблю систем.) Другими словами, можно вычислить только в некотором смысле среднее значение интеграла столкновений.

Рассмотрим два сорта частиц, обозначаемых индексами 1 и 2. Частицы первого сорта могут в частном случае быть тождественны частицам второго сорта, но мы должны предусмотреть случаи, когда они различны, например когда ими являются ионы и электроны. Пусть функции распределения для этих систем будут соответственно  $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  и  $f_2(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ . Число столкновений частиц первого сорта с частицами второго сорта, происходящих в точке  $\mathbf{r}$  в единицу времени, будет пропорционально  $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1)$  и  $f_2(\mathbf{r}, \mathbf{v}_2)$ . Скорости сталкивающихся частиц  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  не обязательно должны быть равны друг другу. Более того, эти частицы могут не находиться в одной и той же точке, поскольку, как мы видели в гл. 8, столкновения происходят между частицами, находящимися друг от друга на расстояниях, меньших дебаевского радиуса. Однако будем считать, что  $f_1$  и  $f_2$  меняются на расстоянии дебаевского радиуса незначительно, так что с хорошей степенью точности можно брать их значения в одной и той же точке.

Предположение о пропорциональности числа столкновений произведению  $f_1 \cdot f_2$  означает, что учитываются только парные столкновения. Поскольку частица одновременно испытывает столкновения со всеми частицами, находящимися от нее на расстояниях, меньших дебаевского радиуса, может показаться, что наше предположение не-

верно. Но надо учесть, что столкновения при прицельных расстояниях порядка дебаевского радиуса очень слабы, т. е. частицы в результате этих столкновений очень мало изменяют свое направление. Общий результат таких слабых столкновений является суммой парных столкновений выбранной частицы со всеми другими. При близких столкновениях, приводящих к отклонению на большие углы, эта аддитивность, конечно, нарушается. Прицельное расстояние, соответствующее отклонению на большие углы, определяется равенством  $Z_1 Z_2 e^2 / d = kT$ . Для электронов и протонов  $d$  оказывается меньше  $10^{-8}$  см, если  $kT > 10$  эв. Поэтому число частиц в сфере с радиусом  $d$  будет меньше  $10^{-24} N$ . Поэтому для плазмы с  $N < 10^{20}$  предположение о том, что сильные столкновения являются парными, вполне применимо. Основной вклад вносят при этом куда более многочисленные слабые столкновения.

В результате столкновения скорости частиц  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  меняются соответственно на  $\mathbf{v}'_1$  и  $\mathbf{v}'_2$ .

Относительная скорость и скорость центра масс, определенные в § 8.5 и равные до столкновения  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{V}$ , после столкновения меняются на  $\mathbf{v}'$  и  $\mathbf{V}'$ . Число столкновений проще всего вычислить, используя переменные, относящиеся к центру масс. В этих переменных дифференциальное сечение рассеяния зависит только от абсолютной величины  $v$  и угла столкновения, т. е. от  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}')$ :

$$\sigma = \sigma [v, (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}')]. \quad (9.3)$$

Число частиц первого сорта, покидающих объем  $d\mathbf{v}_1$  в результате столкновений с частицами второго сорта, содержащимися в объеме  $d\mathbf{v}_2$ , в результате которых их относительная скорость окажется между  $v'$  и  $v' + dv'$ , а скорость центра масс — между  $V'$  и  $V' + dV'$ , равно

$$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1) f_2(\mathbf{r}, \mathbf{v}_2) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 \cdot v \sigma [v, (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}')] \times \\ \times \delta(v - v') \frac{d\mathbf{v}'}{v^2} \delta(\mathbf{V} - \mathbf{V}') d\mathbf{V}'.$$

Наличие в этом выражении  $\delta$ -функции  $\delta(v - v')$  соответствует неизменности относительной скорости при столкновениях, и  $\delta$ -функции  $\delta(\mathbf{V} - \mathbf{V}')$  — постоянству скорости центра масс. Но нас больше интересуют скорости  $\mathbf{v}'_1$  и  $\mathbf{v}'_2$ . Ввиду равенства фазовых объемов

$$d\mathbf{v}' d\mathbf{V}' = d\mathbf{v}'_1 d\mathbf{v}'_2 \quad (9.4)$$

число столкновений можно переписать следующим образом:

$$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1) f_2(\mathbf{r}, \mathbf{v}_2) dv_1 dv_2 \times \\ \times \frac{1}{v} \sigma [v(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}')] \delta(v - v') \delta(\mathbf{V} - \mathbf{V}') dv'_1 dv'_2. \quad (9.5)$$

В этом выражении переменные, соответствующие системе центра масс, должны считаться функциями от  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ ,  $\mathbf{v}'_1$  и  $\mathbf{v}'_2$ .

Теперь вычислим интеграл столкновений в уравнении (9.2) для функции  $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1)$ . Рассмотрим группу частиц, занимающих фазовый объем  $dv_1$ . В результате столкновений часть частиц покинет этот объем, а некоторое количество других частиц попадет в него. Число выбывших частиц на единицу объема равно

$$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1) \iiint f_2(\mathbf{r}, \mathbf{v}_2) \cdot \frac{1}{v} \sigma \cdot \delta(v - v') \delta(\mathbf{V} - \mathbf{V}') dv_2 dv'_1 dv'_2.$$

Выражение (9.5) дает нам количество частиц, попадающих в объем  $dv_1$ . Число частиц, попадающих в этот объем, очевидно, можно получить, просто поменяв местами штрихованные и нештрихованные величины, заметив, что  $v$ -,  $\sigma$ - и  $\delta$ - функции не меняются при такой замене. Тогда число частиц, попадающих в результате столкновений в фазовый объем  $dv_1$ , будет равно (в расчете на единичный объем)

$$\iiint f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_1) f_2(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_2) \frac{1}{v} \sigma \cdot \delta(v - v') \delta(\mathbf{V} - \mathbf{V}') dv_2 dv'_1 dv'_2.$$

Окончательно для интеграла столкновений, учитывающего столкновения частиц первого и второго сорта, будем иметь

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1)}{\partial t} \Big|_{1,2} = \iiint [f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_1) f_2(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_2) - f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1) f_2(\mathbf{r}, \mathbf{v}_2)] \times \\ \times \frac{1}{v} \sigma [v(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}')] \delta(v - v') \delta(\mathbf{V} - \mathbf{V}') dv_2 dv'_1 dv'_2. \quad (9.6)$$

В окончательном виде уравнение Больцмана для  $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1)$  должно содержать столько подобных членов, сколько имеется сортов частиц, включая и первый сорт.



Рассмотрим вопрос о том, можно ли при помощи написанного интеграла столкновений вычислить среднюю частоту столкновений. Это невозможно, поскольку интеграл столкновений содержит произведение  $f_1 \cdot f_2$ . Рассмотрим, например, случай, когда частицы обоих сортов тождественны. Известно, что каждая частица испытывает столкновения со всеми другими, находящимися на расстояниях, меньших дебаевского радиуса. Пусть число таких частиц равно  $n$ , а среднее от него  $\bar{n}$ . Тогда  $n = \bar{n} + \delta n$ , где  $\delta n$  — флуктуация числа частиц.

Число столкновений пропорционально выражению

$$\overline{n^2} = \overline{(\bar{n} + \delta n)^2} = \bar{n}^2 + \overline{\delta n^2}.$$

Поскольку в интеграле столкновений (9.6) используется только среднее значение  $f_1$ , соответствующее  $\bar{n}$ , влияние флуктуаций ( $\overline{\delta n^2}$ ) тем самым не учитывается. Как уже было показано в § 8.2, для сферы дебаевского радиуса

$$\overline{\delta n^2} = \frac{1}{2} n; \quad \frac{\overline{\delta n^2}}{\bar{n}^2} = \frac{1}{2\bar{n}}.$$

Поэтому выражение (9.6) не отражает точно среднее число столкновений, когда число частиц в пределах дебаевской сферы невелико.

### § 9.3. Тепловое равновесие

Рассмотрим систему, состоящую из частиц одного сорта. Тогда можно опустить индексы у  $f$  в выражении (9.6). Индексы же у обозначений скоростей, естественно, необходимо сохранить.

Опыт показывает, что подобная система с течением времени приходит в состояние теплового равновесия, не нарушающееся в дальнейшем, если внешние условия поддерживаются постоянными. Другими словами, функция распределения  $f$  стремится к некоторому стационарному виду. Уравнение Больцмана описывает изменение  $f$  со временем. Поэтому из него должно следовать, что  $f$  стремится к стационарному виду. Больцману удалось доказать, что это действительно так. Приведем его доказательство.

Предположим, что внешние силы отсутствуют и  $f$  не зависит от пространственных координат. Тогда функция

распределения меняется только из-за столкновений и уравнение Больцмана сводится к выражению (9.6), в котором дополнительно опущена зависимость от  $\mathbf{r}$  и индексы у  $f$ :

$$\frac{\partial f(\mathbf{v}_1)}{\partial t} = \iiint [f(\mathbf{v}'_1) f(\mathbf{v}'_2) - f(\mathbf{v}_1) f(\mathbf{v}_2)] \frac{1}{v} \times \\ \times \sigma \cdot \delta(v - v') \delta(\mathbf{V} - \mathbf{V}') d\mathbf{v}_2 d\mathbf{v}'_1 d\mathbf{v}'_2. \quad (9.7)$$

Так как из термодинамики известно, что состояние равновесия характеризуется максимальной энтропией, наша задача заключается в нахождении выражения для энтропии и установлении зависимости энтропии от функции распределения по скоростям. Если разделить пространство скоростей на ряд ячеек, то полная энтропия будет равна сумме энтропий отдельных ячеек. Кроме того, поскольку энтропия каждой ячейки должна оставаться неизменной при преобразованиях к координатной системе, движущейся с постоянной скоростью, она не должна явно зависеть от средней скорости этой ячейки. Поэтому энтропия отдельной ячейки может быть функцией только от  $f(\mathbf{v})$ , а полная энтропия в силу своей аддитивности должна быть пропорциональна величине:

$$H = \int g(f) dv,$$

где  $g(f)$  — некоторая функция  $f$ . Одним из способов определения  $g(f)$  может служить условие экстремальности  $H$  для распределения Максвелла, которое соответствует равновесию. Если взять вариацию от  $H$  по  $f$ , то получим

$$\delta H = \int \frac{dg}{df} \delta f dv. \quad (9.8)$$

При вычислении этой вариации полное число частиц и полная энергия должны сохраняться постоянными. (Число частиц, импульс и энергия сохраняются при столкновениях.) Таким образом,

$$\int \delta f dv = 0; \quad (9.9)$$

$$\int v^2 \delta f dv = 0. \quad (9.10)$$

Для решения этой вариационной задачи используем метод неопределенных множителей Лагранжа. Умножим уравнение (9.9) на постоянную  $\alpha$ , уравнение (9.10) на постоян-

ную  $\beta$  и сложим их с уравнением (9.8). Если затем приравнять  $\delta H$  нулю, то получим

$$\int \left( \frac{dg}{df} + \alpha + \beta v^2 \right) \delta f dv = 0.$$

Поскольку это равенство должно быть справедливым для любых  $\delta f$ , необходимо, чтобы

$$\frac{dg}{df} = -\alpha - \beta v^2. \quad (9.11)$$

Это уравнение должно удовлетворяться для распределения Максвелла. При этом необходимо выполнение равенства

$$-\alpha - \beta v^2 = A + B \ln f(v),$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные. Решение уравнения (9.11) тогда имеет вид

$$g(f) = Af + B(f \ln f - f) + C = Bf \ln f + (A - B)f + C,$$

где  $C$  — также постоянная, которую нужно приравнять нулю, для того, чтобы интеграл, определяющий  $H$ , был конечным.

Член  $(A - B)f$  может быть также опущен, поскольку при интегрировании по скоростям он даст величину, пропорциональную полному числу частиц, которая также постоянна. Кроме того, можно опустить коэффициент  $B$ , определив  $H$  следующим образом:

$$H = \int f \ln f dv, \quad (9.12)$$

и считать, что функционал  $H$  для постоянного числа частиц и постоянной энергии монотонно зависит от энтропии.

Для подтверждения этого вывода докажем теперь на основании уравнения Больцмана (9.7), что столкновения стремятся уменьшить величину  $H$  или, точнее, они не могут ее увеличить. Таким образом,  $H$  должно быть пропорционально энтропии со знаком минус. Из уравнения (9.12) имеем

$$\frac{dH}{dt} = \int [1 + \ln f(\mathbf{v}_1)] \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v}_1,$$

а из уравнения (9.7)

$$\frac{dH}{dt} = \iiint \iiint [1 + \ln f(\mathbf{v}_1)] [f(\mathbf{v}'_1) f(\mathbf{v}'_2) - f(\mathbf{v}_1) f(\mathbf{v}_2)] \times \\ \times \frac{\sigma}{v} \cdot \delta \cdot \delta d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 d\mathbf{v}'_1 d\mathbf{v}'_2. \quad (9.13)$$

В этом интеграле произведение квадратной скобки на  $\frac{1}{v} \sigma \cdot \delta \cdot \delta$  обладает следующими свойствами симметрии:

а) не меняется при взаимной замене  $\mathbf{v}'_1$  на  $\mathbf{v}'_2$ , при одновременной замене  $\mathbf{v}_1$  на  $\mathbf{v}_2$ ;

б) меняет знак при замене  $\mathbf{v}_1$  на  $\mathbf{v}_1$ , при одновременной замене  $\mathbf{v}'_2$  на  $\mathbf{v}'_2$ .

Воспользовавшись этими свойствами, можно переписать уравнение (9.13) еще три раза, заменив  $\mathbf{v}_1$  в логарифме последовательно  $\mathbf{v}_2$ ,  $\mathbf{v}'_1$  и  $\mathbf{v}'_2$ . Складывая полученные четыре уравнения, найдем

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{4} \iiint \iiint \ln \frac{f(\mathbf{v}_1) f(\mathbf{v}_2)}{f(\mathbf{v}'_1) f(\mathbf{v}'_2)} [f(\mathbf{v}'_1) f(\mathbf{v}'_2) - f(\mathbf{v}_1) f(\mathbf{v}_2)] \times \\ \times \frac{1}{v} \sigma \cdot \delta \cdot \delta \cdot d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 d\mathbf{v}'_1 d\mathbf{v}'_2. \quad (9.14)$$

В зависимости от значений переменных интегрирования величина  $\frac{1}{v} \sigma \cdot \delta \cdot \delta$  положительна или равна нулю. С другой стороны, в зависимости от значений  $f$  логарифм, умноженный на квадратную скобку, отрицателен или равен нулю. Следовательно,  $dH/dt$  — отрицательно или равно нулю, в силу чего  $H$  не может возрасть. Этот вывод известен как  $H$ -теорема Больцмана.

Для большинства видов функции распределения  $H$  уменьшается со временем, однако не неограниченно (если энергия и число частиц сохраняются), поскольку  $H$  не может стать по отрицательной величине больше своего значения для случая распределения Максвелла. Как было показано выше, функция  $H$  имеет экстремум для распределения Максвелла. Покажем теперь, что этим экстремумом является абсолютный минимум. Выберем некоторые значения плотности частиц и энергии (температуры). Далее, выберем для удобства такие единицы длины и скорости, чтобы распределение Максвелла имело вид  $e^{-v^2}$ .

Такое распределение симметрично относительно точки  $v = 0$ . В целях большей общности можно использовать выражение  $e^{-|v-v_a|^2}$ , где  $v_a$  — средняя скорость. Однако интеграл столкновений уравнения Больцмана не может привести к изменению средней скорости, так как импульс при столкновениях сохраняется. Поэтому вместо использования общего вида функции распределения перейдем в систему отсчета, в которой  $v_a$  всегда равно нулю.

Рассмотрим теперь видоизмененную функцию распределения:

$$f = e^{-v^2} [1 + \psi(v)]. \quad (9.15)$$

Здесь функция  $f$  произвольна (поскольку  $\psi$  — произвольная функция), за исключением требования, налагаемого положительностью  $f$ :

$$\psi \geq -1. \quad (9.16)$$

Так как функция  $f$  приводит к тем же значениям плотности и энергии, что и  $e^{-v^2}$ , необходимо потребовать соблюдения следующих условий:

$$\int \psi e^{-v^2} dv = 0; \quad (9.17)$$

$$\int v^2 \psi e^{-v^2} dv = 0. \quad (9.18)$$

Для функции  $f$ , определенной выражением (9.15),

$$H = - \int v^2 e^{-v^2} dv - \int \psi v^2 \cdot e^{-v^2} dv + \\ + \int (1 + \psi) \ln(1 + \psi) e^{-v^2} dv.$$

Первый член справа равен значению  $H$ , соответствующему распределению Максвелла —  $e^{-v^2}$ . Таким образом, нам остается показать, что сумма двух остающихся членов больше нуля. Второй член справа обращается в нуль в силу уравнения (9.18). Из последнего члена справа, не изменяя его величины, вычислим интеграл (9.17) и получим

$$\int [(1 + \psi) \ln(1 + \psi) - \psi] e^{-v^2} dv.$$

Поскольку первое выражение в квадратных скобках положительно для  $\psi \geq -1$ , этот интеграл положителен или равен нулю. Поэтому величина  $H$  не может быть меньше

значения, соответствующего распределению Максвелла, при условии, что плотность и энергия сохраняются постоянными.

Если теперь вновь допустим существование средней скорости  $\mathbf{v}_a$ , то, принимая во внимание дополнительно сохранение импульса, придем к выводу, что  $H$  не может быть меньше своего значения, соответствующего распределению Максвелла, симметричного относительно точки  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_a$ . Поскольку интеграл столкновений в уравнении Больцмана обеспечивает сохранение числа частиц, импульса и энергии, в результате интегрирования этого уравнения по времени мы никак не сможем получить такого значения  $\dot{f}$ , которое приводило бы к значениям  $H$ , большим по отрицательной величине, чем значения, соответствующие (при той же плотности, средней скорости и энергии) распределению Максвелла.

Легко видеть, что распределение Максвелла вида  $e^{-|\mathbf{v}-\mathbf{v}_a|^2}$  обращает  $dH/dt$  (из уравнения (9.14)) в нуль. Чтобы убедиться в этом, возьмем, например, следующие функции распределения:

$$f(\mathbf{v}_1) = \exp[-\mathbf{v}_1^2 + 2(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_a) - \mathbf{v}_a^2];$$

$$f(\mathbf{v}_2) = \exp[-\mathbf{v}_2^2 + 2(\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_a) - \mathbf{v}_a^2]$$

и аналогичные выражения для  $f(\mathbf{v}'_1)$  и  $f(\mathbf{v}'_2)$ . Если энергия и импульс не сохраняются, то  $\delta$ -функции в уравнении (9.14) равны нулю. С другой стороны, при сохранении энергии и импульса

$$v_1^2 + v_2^2 = v_1'^2 + v_2'^2; \quad \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2$$

и

$$f(\mathbf{v}'_1) f(\mathbf{v}'_2) - f(\mathbf{v}_1) f(\mathbf{v}_2) = 0.$$

При этом подынтегральное выражение тождественно обращается в нуль.

Попытаемся теперь выяснить, принимает ли  $H$  свое минимальное значение с течением времени. Это будет только тогда, когда единственным распределением, обращающим  $dH/dt$  в нуль, является распределение Максвелла, так как если  $dH/dt$  не равно нулю, то оно меньше нуля.

Поскольку подынтегральное выражение в уравнении (9.14) больше или равно нулю, единственной возможностью

для обращения  $dH/dt$  в нуль является тождественное равенство нулю подинтегрального выражения. А это может иметь место тогда и только тогда, когда выражение

$$[\ln f(\mathbf{v}'_1) + \ln f(\mathbf{v}'_2) - \ln f(\mathbf{v}_1) - \ln f(\mathbf{v}_2)] \sigma \cdot \delta \cdot \delta \quad (9.19)$$

тождественно обращается в нуль.  $\delta$ -Функции отличны от нуля тогда и только тогда, когда импульс и энергия сохраняются. Предположим, что  $\sigma$  имеет конечную величину (и, конечно, положительную) для всех значений скоростей, при которых импульс и энергия сохраняются. В частности, это справедливо для кулоновского рассеяния. Тогда  $dH/dt$  может обратиться в нуль, если выражение в квадратных скобках в выражении (9.19) обращается в нуль при одновременном сохранении импульса и энергии. Обозначим для краткости

$$g(\mathbf{v}_1) = \ln f(\mathbf{v}_1). \quad (9.20)$$

Тогда, выражая скорости частиц через скорости центра масс и относительные скорости, найдем условие обращения  $dH/dt$  в нуль при сохранении энергии и импульса

$$g\left(\mathbf{V} + \frac{\mathbf{v}}{2}\right) + g\left(\mathbf{V} - \frac{\mathbf{v}}{2}\right) = g\left(\mathbf{V}' + \frac{\mathbf{v}'}{2}\right) + g\left(\mathbf{V}' - \frac{\mathbf{v}'}{2}\right).$$

Но при сохранении энергии и импульса

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}', \quad |\mathbf{v}| = |\mathbf{v}'|.$$

Поэтому условие обращения  $dH/dt$  в нуль будет выглядеть следующим образом:

$$g(\mathbf{V} + \mathbf{u}) + g(\mathbf{V} - \mathbf{u}) = h(\mathbf{V}, u^2), \quad (9.21)$$

где  $h$  — некоторая произвольная функция  $\mathbf{V}$  и  $u^2$  ( $\mathbf{v}/2$  выражено через  $\mathbf{u}$ ). Таким образом,  $h$  не зависит от направления  $\mathbf{u}$ . Покажем далее, что, согласно уравнению (9.21),  $g$  должна быть квадратичной функцией своих аргументов.

Для доказательства этого продифференцируем равенство (9.21) по  $u_i$  ( $i$ -я компонента  $\mathbf{u}$ ). В результате получим

$$\partial_i g(\mathbf{V} + \mathbf{u}) - \partial_i g(\mathbf{V} - \mathbf{u}) = 2u_i \frac{\partial h}{\partial u^2}(\mathbf{V}, u^2), \quad (9.22)$$

где  $\partial_i g$  — производная функции  $g$  по  $i$ -й компоненте ее аргумента. Продифференцируем еще раз по  $u_j$  и затем положим  $\mathbf{u} = 0$ . Тогда получим

$$\partial_j \partial_i g(\mathbf{V}) = \delta_{ij} \frac{\partial h}{\partial u^2}(\mathbf{V}, 0). \quad (9.23)$$

Продифференцировав равенство (9.22) по  $V_j$ , получим

$$\partial_j \partial_i g(\mathbf{V} + \mathbf{u}) - \partial_j \partial_i g(\mathbf{V} - \mathbf{u}) = 2u_i \frac{\partial}{\partial V_j} \frac{\partial h}{\partial u^2}(\mathbf{V}, u^2).$$

Поскольку левая часть этого уравнения симметрична по индексам  $i$  и  $j$ , то же самое должно быть справедливо и для правой части. В силу этого

$$u_i \frac{\partial}{\partial V_j} \frac{\partial h}{\partial u^2}(\mathbf{V}, u^2) = u_j \frac{\partial}{\partial V_i} \frac{\partial h}{\partial u^2}(\mathbf{V}, u^2).$$

Выведенное уравнение должно быть справедливо для всех значений аргументов. В частности, оно будет справедливо, если  $u_j = 0$ , сохраняя при этом  $u_i$  конечным. Тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial V_j} \frac{\partial h}{\partial u^2}(\mathbf{V}, u^2) = 0,$$

т. е.  $\frac{\partial h}{\partial u^2}(\mathbf{V}, u^2)$  не зависит от  $\mathbf{V}$ . Следовательно,  $\frac{\partial h}{\partial u^2}(\mathbf{V}, 0)$  — постоянная, которую обозначим  $c$ . Тогда уравнение (9.23) приобретает вид

$$\partial_j \partial_i g(\mathbf{V}) = c \delta_{ij}$$

и имеет следующее общее решение:

$$g(\mathbf{V}) = a + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{V}) + \frac{c}{2} V^2,$$

где  $a$  и  $\mathbf{b}$  — постоянные. Поскольку  $g$  — логарифмическая функция  $f$ , видно, что  $dH/dt$  обращается в нуль только для обобщенного распределения Максвелла. Следовательно, решение уравнения Больцмана (9,7) должно стремиться с течением времени к этому распределению. Постоянные  $a$ ,  $\mathbf{b}$  и  $c$  определяются через начальные плотность, энергию и среднюю скорость.

При этом доказательстве предполагалось, что поперечное сечение рассеяния  $\sigma$  конечно для всех значений скоро-



стей, для которых импульс и энергия сохраняются. Если сечение связывает скорость  $v_1$  только со скоростями в некоторой области  $R(v_1)$  вокруг  $v_1$ , то функция распределения  $f$  будет максвелловской только в этой области.

Допустим, что  $v_b$  — значение скорости в этой области и  $R(v_b)$  — область, соответствующая скорости  $v_b$  частиц, испытавших рассеяние. Поскольку функция  $f$  должна быть в области  $R(v_b)$  также максвелловской, а области  $R(v_1)$  и  $R(v_b)$ , согласно нашему предположению, должны перекрываться, для них справедливо распределение Максвелла. Тогда можно заключить, что одно и то же распределение Максвелла справедливо для всех скоростей при условии, что существует последовательность актов рассеяния, приводящих к любой заданной скорости, начиная от одного значения скорости. С другой стороны, если имеются отдельные области в пространстве скоростей, которые не могут быть связаны посредством столкновений, то распределение Максвелла в этих областях не должно быть одинаковым. В случае кулоновского рассеяния таких областей, однако, нет.

#### § 9.4. Обобщение $H$ -теоремы

В предыдущем параграфе было доказано несколько теорем, относящихся к проблеме равновесия при следующих ограничениях:

а) был выбран только один сорт взаимодействующих частиц;

б) отсутствовали внешние силы;

в) функция распределения не зависела от пространственных координат.

Суммируем эти теоремы.

**Т е о р е м а 1.** Столкновения стремятся уменьшить (не могут увеличить) величину  $H$ .

**Т е о р е м а 2.** Наименьшее значение функции  $H$  с учетом постоянства плотности, средней скорости и средней энергии реализуется при подстановке в нее обобщенного распределения Максвелла.

**Т е о р е м а 3.** Указанное распределение является асимптотическим, к которому с течением времени стремится любое распределение, поскольку только это распределение обращает  $dH/dt$  в нуль.

В этом параграфе мы обобщим некоторые из этих теорем. Другие обобщения будут сделаны в следующей главе.

Вначале освободимся от условия а). Нетрудно видеть, что если определить  $H$  следующим образом:

$$H = \sum_i \int f_i \ln f_i dv, \quad (9.24)$$

где сумма берется по всем сортам взаимодействующих частиц, то теоремы 1, 2 и 3 остаются справедливыми. В теореме 2 предполагается сохранение плотности частиц каждого сорта, среднего импульса всех частиц и средней энергии частиц, а обобщенные распределения Максвелла характеризуются одинаковыми средними скоростями и средними энергиями (температурами) для всех сортов частиц.

Общая задача при наличии внешних сил будет рассмотрена полнее в дальнейшем, сейчас обратим внимание лишь на один случай, для которого изложенные выше результаты оказываются применимыми. Предположим, что имеется постоянное магнитное поле  $\mathbf{B}$ . Тогда в уравнении Больцмана появится член, пропорциональный

$$[\mathbf{v}\mathbf{B}] \nabla_v f = -[\mathbf{B}, (\mathbf{v}\nabla_v f)] = -(\mathbf{B}, [\mathbf{v}\nabla_v] f).$$

Если теперь ввести в пространстве скоростей цилиндрическую систему координат с осью вдоль направления поля  $\mathbf{B}$ , то

$$(\mathbf{B}, [\mathbf{v}\nabla_v] f) = B \frac{\partial}{\partial \theta_v} f, \quad (9.25)$$

где  $\theta_v$  — угловая координата. Таким образом, если распределение скоростей не зависит от этой угловой координаты, то написанный член обращается в нуль, и уравнение Больцмана принимает первоначальную форму. Более того, поскольку интеграл столкновений не влияет на зависимость функции распределения от  $\theta_v$ , то предыдущие теоремы будут применимы в том случае, если функция  $f$  в начальный момент не зависела от  $\theta_v$ .

### § 9.5. Упрощение интеграла столкновений

Форма интеграла столкновений, использованная в уравнении (9.6), была выбрана с целью сделать симметричность подинтегрального выражения по различным

переменным максимально очевидной, поскольку эта симметричность важна для доказательства упомянутых теорем.

Наша дальнейшая задача при рассмотрении диффузии в пространстве скоростей — изучение характера приближения распределения по скоростям к равновесному распределению Максвелла, т. е. по существу решение уравнения (9.6). Для этого необходимо проинтегрировать выражение (9.6). Начнем с интегрирования по тем переменным, которые содержатся в аргументе  $\delta$ -функций. Предположим для упрощения, что частицы первого сорта в начальный момент образуют направленный моноэнергетический пучок, т. е.

$$f_1(\mathbf{v}_1) = \delta(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0). \quad (9.26)$$

Очевидно, пространственная плотность такого распределения равна единице, а скорость каждой частицы —  $\mathbf{v}_0$ . Если подставить эту функцию распределения в уравнение (9.6), то можно вычислить  $df_1/dt$ , т. е. определить тенденцию пучка к рассеянию в пространстве скоростей.

Рассматривая сначала член, соответствующий частицам, покидающим элементарный объем [второй член в квадратной скобке в уравнении (9.6)], можно заметить, что интегрирование по конечным (штрихованным) скоростям может быть проведено сразу и что в результате получается бесконечная величина. Этот результат объясняется тем, что полное сечение рассеяния бесконечно. Следовательно, имеющееся в начальный момент распределение типа  $\delta$ -функции сразу же нарушается, т. е. за произвольно малое время все частицы в какой-либо степени испытывают рассеяние. Указанный результат остается справедливым даже для экранированного потенциала  $e^{-rD/r}$ . В этом случае рассеяние большинства частиц все равно происходит немедленно.

Рассмотрение члена, соответствующего частицам, попадающим в элементарный объем, приводит к более содержательным результатам. Обозначая этот член через  $I$ , запишем его в виде

$$I(\mathbf{v}_1) = \iiint \delta(\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}_0) f_2(\mathbf{v}'_2) \frac{\sigma}{v'} \delta(v' - v) \times \\ \times \delta(\mathbf{V}' - \mathbf{V}) dv_2 dv' d\mathbf{V}'. \quad (9.27)$$

Поскольку зависимость  $\sigma$ - и  $\delta$ -функций от относительных скоростей имеет более простой вид, мы заменили  $dv'_1 dv'_2$  на эквивалентное выражение  $dv' dV'$ . При интегрировании по  $v_2$ ,  $v'$  и  $V'$  мы должны считать  $v_1$  и  $v_0$  постоянными, а все остальные переменные необходимо выразить через переменные интегрирования. Например,

$$v'_2 = v'_1 - v'.$$

Ввиду присутствия  $\delta$ -функции  $\delta(v'_1 - v_0)$  заменим  $v'_1$  на  $v_0$ , так что

$$v'_2 \rightarrow v_0 - v', \quad f_2(v'_2) \rightarrow f_2(v_0 - v'). \quad (9.28)$$

Сечение рассеяния равно

$$\sigma = \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{4m^2 v^4} \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}},$$

где  $\theta$  — угол рассеяния в системе центра масс, показанный на рис. 9.1. Поскольку присутствие  $\delta$ -функции  $\delta(v' - v)$  делает  $v$  и  $v'$  равными по абсолютной величине

$$2v \sin \frac{\theta}{2} = |v' - v|, \quad (9.29)$$

так что

$$\sigma = \frac{4Z_1^2 Z_2^2 e^4}{m^2} \cdot \frac{1}{|v - v'|^4}.$$

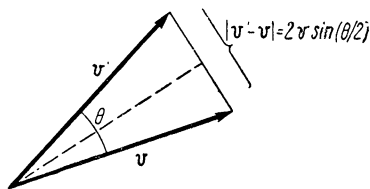


Рис. 9.1. Связь приращения скорости и угла рассеяния.

$$(9.30)$$

Так как  $v$  не является здесь ни переменной интегрирования, ни постоянной, нам необходимо выразить ее через другие переменные. Удобнее всего это сделать, заметив, что

$$v_1 = V + \frac{m_2}{M} v; \quad (9.31)$$

$$v'_1 = V' + \frac{m_2}{M} v',$$

где можно заменить  $v'_1$  на  $v_0$ , а  $V'$  на  $V$  ввиду наличия под интегралом соответствующих  $\delta$ -функций. Вычитая эти уравнения друг из друга, найдем

$$v - v' = \frac{M}{m_2} (v_1 - v_0) = \frac{M}{m_2} \Delta v_1. \quad (9.32)$$

В уравнении (9.32) была введена новая величина  $\Delta \mathbf{v}_1$ , равная изменению скорости частицы первого сорта в результате рассеяния. Эта величина, очевидно, должна считаться постоянной при интегрировании в (9.27). Таким образом, поперечное сечение

$$\sigma = \left(\frac{m_2}{M}\right)^4 \frac{4Z_1^2 Z_2^2 e^4}{m^2 |\Delta \mathbf{v}_1|^4} \quad (9.33)$$

может быть вынесено за знак интеграла.

Проведем теперь интегрирование по  $\mathbf{v}'$ , используя присутствие  $\delta$ -функции  $\delta(\mathbf{V} - \mathbf{V}')$ . В результате получим

$$I(\mathbf{v}_0, \Delta \mathbf{v}_1) = \left(\frac{m_2}{M}\right)^4 \frac{4Z_1^2 Z_2^2 e^4}{m^2 |\Delta \mathbf{v}_1|^4} \int \int \delta(\mathbf{v}' - \mathbf{v}_0) f_2(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}') \times \\ \times \frac{\delta(v - v')}{v} dv_2 dv'. \quad (9.34)$$

В аргументе  $\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}')$  выразим  $\mathbf{v}$  при помощи соотношения (9.32), т. е.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \frac{M}{m_2} \Delta \mathbf{v}_1. \quad (9.35)$$

Обозначение  $v$  сохраним только для краткости.

Затем проведем интегрирование по  $\mathbf{v}_2$ . Первая  $\delta$ -функция теперь будет зависеть от  $\mathbf{v}_2$ , так как

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{V}' + \frac{m_2}{M} \mathbf{v}' = \mathbf{V} + \frac{m_2}{M} \mathbf{v}' = \frac{m_1}{M} \mathbf{v}_1 + \frac{m_2}{M} \mathbf{v}_2 + \frac{m_2}{M} \mathbf{v}',$$

поэтому

$$\delta(\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}_0) = \delta\left(\frac{m_2}{M} \mathbf{v}_2 + \frac{m_1}{M} \mathbf{v}_1 + \frac{m_2}{M} \mathbf{v}' - \mathbf{v}_0\right) = \\ = \left(\frac{M}{m_2}\right)^3 \delta\left(\mathbf{v}_2 + \frac{m_1}{m_2} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}' - \frac{M}{m_2} \mathbf{v}_0\right).$$

Все другие члены подынтегрального выражения не зависят от  $\mathbf{v}_2$ . В результате интегрирования по  $\mathbf{v}_2$  получаем

$$I(\mathbf{v}_0, \Delta \mathbf{v}_1) = \frac{m_2}{M} \frac{4Z_1^2 Z_2^2 e^4}{m^2 |\Delta \mathbf{v}_1|^4} \int f_2(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}') \frac{\delta(v - v')}{v'} dv', \quad (9.36)$$

где  $\mathbf{v}$  определяется согласно равенству (9.35). Дальнейшее интегрирование не может быть проведено до тех пор, пока

не установим конкретный вид  $f_2$ . (В действительности можно провести интегрирование по одной из компонент  $\mathbf{v}'$ , но лучше здесь этого не делать.)

### § 9.6. Рассеяние направленного пучка

В этом параграфе упростим выражение (9.36) и применим его к случаю, когда  $f_2$  является максвелловским распределением.

Заметим, что поскольку  $v$  и  $v'$  — не отрицательные величины, то

$$\frac{\delta(v-v')}{v'} = 2\delta(v^2 - v'^2).$$

Далее, согласно выражению (9.35),

$$v^2 - v'^2 = 2 \frac{M}{m_2} (v' \Delta v_1) + \left( \frac{M}{m_2} \Delta v_1 \right)^2.$$

Теперь удобнее ввести взамен  $\mathbf{v}'$  новую переменную  $\mathbf{u}$ . Положим

$$\mathbf{v}' = -\mathbf{u} - \frac{1}{2} \frac{M}{m_2} \Delta \mathbf{v}_1,$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{\delta(v-v')}{v'} &= 2\delta \left[ -2 \frac{M}{m_2} (\mathbf{u} \Delta \mathbf{v}_1) \right] = \frac{m_2}{M} \delta [(\mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{v}_1)] = \\ &= \frac{m_2}{M} \frac{1}{|\Delta \mathbf{v}_1|} \delta(u_{\parallel}), \end{aligned}$$

где  $u_{\parallel}$  — компонента  $\mathbf{u}$ , параллельная  $\Delta \mathbf{v}_1$ . Следовательно, интегрирование выражения (9.36) сводится к интегрированию по плоскости  $u_{\parallel}=0$ , перпендикулярной  $\Delta \mathbf{v}_1$ , в результате которого получаем

$$I(\mathbf{v}_0, \Delta \mathbf{v}_1) = \frac{4Z_1^2 Z_2^2 e^4}{m_1^2 |\Delta \mathbf{v}_1|^5} \int_{\mathbf{u} \perp \Delta \mathbf{v}_1} f_2 \left( \mathbf{v}_0 + \frac{1}{2} \frac{M}{m_2} \Delta \mathbf{v}_1 + \mathbf{u} \right) d\mathbf{u}. \quad (9.37)$$

Применим эту формулу к случаю, когда  $f_2$  является максвелловским распределением

$$f_2(\mathbf{v}_2) = N_2 \left( \frac{m_2}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_2 v_2^2}{2kT}}, \quad (9.38)$$

где  $N_2$  — плотность, а  $kT$  — температура в энергетических единицах. Тогда функция  $f_2$  в выражении (9.37) будет равна

$$f_2 = N_2 \left( \frac{m_2}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_2}{2kT} \left[ v_{0\parallel} + \frac{M}{2m_2} \Delta v_1 \right]^2} e^{-\frac{m_2}{2kT} (v_{0\perp} + u)^2}.$$

Здесь  $v_{0\parallel}$  — слагающая  $\mathbf{v}_0$ , параллельная  $\Delta \mathbf{v}_1$ , а  $\mathbf{v}_{0\perp}$  — слагающая  $\mathbf{v}_0$ , перпендикулярная  $\Delta \mathbf{v}_1$ , т. е. лежащая в плоскости  $\mathbf{u}$ . Заменим  $\mathbf{u}$  на  $\mathbf{w} = \mathbf{v}_{0\perp} + \mathbf{u}$  и проинтегрируем по  $\mathbf{w}$ . В результате получим

$$I(\mathbf{v}_0, \Delta \mathbf{v}_1) = \frac{4Z_1^2 Z_2^2 e^4}{m_1^2 |\Delta \mathbf{v}_1|^5} \cdot N_2 \times \\ \times \left( \frac{m_2}{2\pi kT} \right)^{1/2} \cdot e^{-\frac{m_2}{2kT} \left[ v_{0\parallel} + \frac{1}{2} \frac{M}{m_2} \Delta v_1 \right]^2}. \quad (9.39)$$

Эта формула дает выражение для вероятности изменений скорости  $\Delta \mathbf{v}_1$  в единицу времени. Для того чтобы исследовать ее более детально, представим экспоненциальное выражение в виде трех сомножителей:

$$\exp \left\{ -\frac{M^2 \Delta v_1^2}{8m_2 kT} \right\}, \\ \exp \left\{ -\frac{M \Delta v_1 v_0 \cos \psi}{2kT} \right\}$$

и

$$\exp \left\{ -\frac{m_2 v_0^2 \cos^2 \psi}{2kT} \right\}.$$

Здесь  $\psi$  — угол между  $\mathbf{v}_0$  и  $\Delta \mathbf{v}_1$ . Наличие второго из этих сомножителей соответствует большей вероятности изменения скорости в обратном направлении ( $\cos \psi$  отрицателен). Третий сомножитель приводит к большей вероятности изменения скорости в перпендикулярном направлении ( $\cos \psi \approx 0$ ), чем в направлении движения, в том случае, когда  $v_0$  много больше тепловой скорости ( $m_2 v_0^2 / 2kT \gg 1$ ). Это связано с тем, что траектории быстрых электронов имеют извилистый характер. И, наконец, множитель  $1/|\Delta v_1|^5$  указывает, что основной вклад в рассеяние вносят малые изменения скорости.

## § 9.7. Средняя скорость изменения энергии частиц

Другой интересной задачей является определение средней скорости изменения величины скорости частиц и их энергии в первоначально монохроматическом по скорости пучке. Будем искать эти величины, не ограничиваясь пока распределением Максвелла.

Для упрощения обозначений опустим индекс 1 у  $\Delta v_1$  и будем считать, что  $\Delta \mathbf{v}$  — изменение скорости частицы, обладавшей начальной скоростью  $\mathbf{v}_0$ . Пусть  $\Delta v_i$  — компоненты  $\Delta \mathbf{v}$  в некоторой декартовой системе координат. Вычислим моменты

$$\overline{\Delta v_i} = \int \Delta v_i I(\mathbf{v}_0, \Delta \mathbf{v}) d(\Delta \mathbf{v}); \quad (9.40)$$

$$\overline{\Delta v_i \Delta v_j} = \int \Delta v_i \Delta v_j I(\mathbf{v}_0, \Delta \mathbf{v}) d(\Delta \mathbf{v}). \quad (9.41)$$

Рассмотрим сначала моменты  $\Delta v_i$ . Подставив выражение (9.36) в уравнение (9.40) и изменив порядок интегрирования, получим

$$\overline{\Delta v_i} = \frac{m_2}{M} \frac{4Z_1^2 Z_2^2 e^4}{m^2} \int dv' \frac{f_2(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}')}{v'} \int \frac{\Delta v_i \delta(v - v')}{|\Delta \mathbf{v}|^4} d(\Delta \mathbf{v}), \quad (9.42)$$

где, согласно выражению (9.35),

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \frac{M}{m_2} \Delta \mathbf{v}.$$

Поскольку в аргументе  $\delta$ -функции фигурирует  $v$ , более удобно в качестве переменной интегрирования во втором интеграле вместо  $\Delta \mathbf{v}$  использовать  $\mathbf{v}$ . Тогда второй интеграл в выражении (9.42), который мы обозначили через  $J_i$ , будет иметь вид

$$J_i = \int \frac{(v - v')_i \delta(v - v')}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^4} dv. \quad (9.43)$$

При наличии  $\delta$ -функции в уравнении (9.43) интегрирование по  $v$  сводится к интегрированию по поверхности сферы радиусом  $v = v'$ . Введем на поверхности этой сферы систему полярных координат  $\theta, \varphi$ , причем  $\mathbf{v}'$  будет служить полярной осью (рис. 9.2). Тогда для  $i$ -х компонент, перпендикулярных  $\mathbf{v}'$ ,  $J_i$  обращается в нуль в силу симметричности.



Учитывая далее, что

$$|\mathbf{v} - \mathbf{v}'| = 2v' \sin \frac{\theta}{2}, \quad (9.44)$$

а параллельная  $\mathbf{v}'$  компонента  $(\mathbf{v} - \mathbf{v}')$  равна

$$(\mathbf{v} - \mathbf{v}')_{\parallel} = -2v' \left( \sin \frac{\theta}{2} \right)^2, \quad (9.45)$$

получим

$$\begin{aligned} J_{\parallel} &= -\frac{2\pi}{8} \cdot \frac{1}{v'} \int_{\theta_m}^{\pi} \frac{\sin \theta}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = -\frac{\pi}{2v'} \int_{\theta_m}^{\pi} \frac{\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = \\ &= -\frac{\pi}{v'} \ln \frac{1}{\sin \left( \frac{\theta_m}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Так как  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}'$  — по существу относительные скорости до и после столкновения, угол  $\theta_m$  — минимальный угол рассеяния, введенный в § 8.5. Обычно  $\theta_m$  имеет очень малую величину, и синус угла можно заменить на значение его аргумента. Тогда для вектора  $\mathbf{J}$  получим

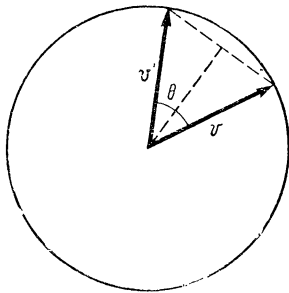


Рис. 9.2. Введение полярных координат для рассеяния.

$$\mathbf{J} = -\pi \ln \left( \frac{2}{\theta_m} \right) \cdot \frac{\mathbf{v}'}{v'^2}. \quad (9.46)$$

Подставим полученное выражение в уравнение (9.42). Согласно соотношениям (8.34) и (8.35),  $\theta_m$  зависит от относительной скорости  $v'$  ( $v$  в этой формуле соответствует нашему  $v'$ ). Однако, так как логарифм — медленно меняющаяся функция, можно считать его постоянным и использовать среднее значение относительной скорости для определения  $\theta_m$ . Тогда для вектора  $\overline{\Delta \mathbf{v}}$  получим

$$\overline{\Delta \mathbf{v}} = -\frac{m_2}{M} \frac{4\pi Z_1^2 Z_2^2 e^4}{m^2} \ln \left( \frac{2}{\theta_m} \right) \int \frac{\mathbf{v}'}{v'^3} f_2(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}') dv'.$$

Интеграл в этом выражении можно дальше упростить, заметив, что

$$\frac{\mathbf{v}'}{v'^3} = -\nabla_{v'} \left( \frac{1}{v'} \right).$$

С использованием этой замены можно взять интеграл по частям, причем  $\nabla_{v'} f_2(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}')$  можно заменить величиной  $-\nabla_{v_0} f_2(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}')$ . Таким образом, получаем

$$\overline{\Delta v} = \frac{4\pi Z_1^2 Z_2^2 e^4}{mm_1} \ln \left( \frac{2}{\theta_m} \right) \nabla_{v_0} \int \frac{f_2(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}') dv'}{v'}. \quad (9.47)$$

Интеграл в этом выражении имеет вид, часто встречающийся в электростатике. Он соответствует выражению для электростатического потенциала в точке  $\mathbf{v}_0$ , создаваемого распределением заряда  $f_2(\mathbf{v}_0)$ . Поэтому если обозначить этот интеграл через  $S(\mathbf{v}_0)$ , то будет справедливым уравнение

$$\nabla_{v_0}^2 S(\mathbf{v}_0) = -4\pi f_2(\mathbf{v}_0). \quad (9.48)$$

Последний результат полезен для численных расчетов, поскольку методы решения уравнения Пуассона хорошо разработаны.

Вычисление моментов  $\overline{\Delta v_i \Delta v_j}$  производится аналогично. Но в этом случае вместо интеграла  $J_i$  получим тензор

$$K_{ij} = \frac{m_2}{M} \int \frac{(\mathbf{v} - \mathbf{v}')_i (\mathbf{v} - \mathbf{v}')_j \delta(v - v')}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^4} dv.$$

Для проведения интегрирования в этом выражении положим, что направление, соответствующее индексу 1, параллельно  $\mathbf{v}'$ , а направления, соответствующие индексам 2 и 3, перпендикулярны  $\mathbf{v}'$  (а также друг другу). При помощи методов, использованных выше, найдем

$$K_{ij} = 0 \quad \text{для } i \neq j;$$

$$K_{11} = \frac{\pi}{2} \frac{m_2}{M};$$

$$K_{22} = K_{33} = \pi \frac{m_2}{M} \left[ \ln \frac{2}{\theta_m} - 1 \right].$$

Поскольку величина  $\ln(2/\theta_m)$  обычно имеет порядок 10 и операция обрезания носит приближенный характер, принято опускать малые члены в подобных выражениях

[члены, не пропорциональные  $\ln(2/\theta_m)$ ]. Поэтому тензор  $K_{ij}$  можно приближенно представить в виде

$$K = \pi \frac{m_2}{M} \ln \left( \frac{2}{\theta_m} \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приведенный тензор записан в особой системе координат, у которой индекс 1 соответствует оси, параллельной  $\mathbf{v}'$ . Поскольку по  $\mathbf{v}'$  предстоит интегрировать, необходимо преобразовать этот тензор к обычной системе координат. С этой целью отметим, что в использованной нами системе координат справедливо равенство

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_{ij} - \frac{v'_i v'_j}{v'^2}.$$

Так как в этом равенстве справа стоит тензор, равный нашему тензору в использованной системе координат, то он равен ему в любой системе.

Используя этот факт, можно найти выражение для  $\overline{\Delta v_i \Delta v_j}$ ,

$$\begin{aligned} \overline{\Delta v_i \Delta v_j} &= \left( \frac{m_2}{M} \right)^2 \frac{4\pi Z_1^2 Z_2^2 e^4}{m^2} \times \\ &\times \ln \left( \frac{2}{\theta_m} \right) \int \left( \frac{\delta_{ij}}{v'} - \frac{v'_i v'_j}{v'^3} \right) f_2(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}') d\mathbf{v}'. \end{aligned}$$

Помимо этого, учитывая, что

$$\frac{\delta_{ij}}{v'} - \frac{v'_i v'_j}{v'^3} = \frac{\partial}{\partial v'_i} \frac{\partial}{\partial v'_j} v',$$

можно еще раз проинтегрировать это выражение по частям. Заменяя далее производные по  $\mathbf{v}'$  производными по  $\mathbf{v}_0$ , окончательно получим

$$\overline{\Delta v_i \Delta v_j} = \frac{4\pi Z_1^2 Z_2^2 e^4}{m_1^2} \ln \left( \frac{2}{\theta_m} \right) \frac{\partial}{\partial v_{0i}} \frac{\partial}{\partial v_{0j}} \int v' f_2(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}') d\mathbf{v}'. \quad (9.49)$$

Приведенное выражение может быть использовано для вычисления моментов заданной функции  $f_2$ . Оно, так же как и выражение (9.47), имеет аналогию с электростати-

ческими уравнениями. Обозначим интеграл в уравнении (9.49)  $T(\mathbf{v}_0)$ . Тогда, дифференцируя и интегрируя по частям, можно показать, что

$$\nabla_{\mathbf{v}_0}^2 T(\mathbf{v}_0) = 2 \int \frac{f_2(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}')}{v'} d\mathbf{v}' = 2S(\mathbf{v}_0), \quad (9.50)$$

и поэтому с помощью уравнения (9.48) получим

$$\nabla_{\mathbf{v}_0}^2 \nabla_{\mathbf{v}_0}^2 T(\mathbf{v}_0) = -8\pi f_2(\mathbf{v}_0). \quad (9.51)$$

Теперь подсчитаем среднюю скорость изменения энергии. Изменение энергии для одной частицы первого сорта равно

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{1}{2} m_1 \{(\mathbf{v}_0 + \Delta \mathbf{v})^2 - v_0^2\} = \\ &= \frac{1}{2} m_1 [(2\mathbf{v}_0 \cdot \Delta \mathbf{v}) + \Delta v^2]. \end{aligned}$$

Поэтому средняя скорость изменения энергии определяется как

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{W}}{dt} &= \frac{1}{2} m_1 [2(\mathbf{v}_0 \bar{\Delta \mathbf{v}}) + \sum_i \overline{\Delta v_i \Delta v_i}] = \\ &= \frac{4\pi Z_1^2 Z_2^2 e^4}{m_1} \ln\left(\frac{2}{\theta_m}\right) \left\{ \frac{m_1}{m} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{v}_0} S(\mathbf{v}_0)) + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{v}_0}^2 T(\mathbf{v}_0) \right\} = \\ &= \frac{4\pi Z_1^2 Z_2^2 e^4}{m_1} \ln\left(\frac{2}{\theta_m}\right) \left\{ \frac{m_1}{m} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{v}_0} S(\mathbf{v}_0)) + S(\mathbf{v}_0) \right\}. \quad (9.52) \end{aligned}$$

Применим эту формулу к случаю, когда  $f_2$  соответствует распределению Максвелла (9.38), получаем

$$S(\mathbf{v}_0) = N_2 \left( \frac{m_2}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int e^{-\frac{m_2(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}')^2}{2kT}} \frac{d\mathbf{v}'}{v'}.$$

Введем для простоты новую переменную

$$u^2 = \frac{m_2}{2kT} v'^2$$

и обозначим угол между  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{v}'$  через  $\psi$ . Пусть также

$$\alpha^2 = \frac{m_2 v_0^2}{2kT}. \quad (9.53)$$

Тогда

$$S(\mathbf{v}_0) = N_2 \left( \frac{m_2}{2\pi kT} \right)^{1/2} 2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 - u^2} u du \times \\ \times \int_0^{\pi} \exp(2\alpha u \cos \psi) \sin \psi d\psi,$$

что после интегрирования по  $\psi$  дает

$$S(\mathbf{v}_0) = N_2 \left( \frac{m_2}{2\pi kT} \right)^{1/2} \cdot \frac{1}{\alpha} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-(u-\alpha)^2} du - \int_0^{\infty} e^{-(u+\alpha)^2} du \right\}.$$

Положим в первом интеграле  $u - \alpha = y$ , а во втором  $u + \alpha = y$ . После этого находим

$$S(\mathbf{v}_0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} N_2 \cdot \frac{1}{v_0} \int_0^{\alpha} e^{-y^2} dy. \quad (9.54)$$

Подставляя этот результат в уравнение (9.52), находим

$$\frac{d\overline{W}}{dt} = -N_2 \frac{8\sqrt{\pi} Z_1^2 Z_2^2 e^4}{m_1 v_0} \ln \left( \frac{2}{\theta^m} \right) \frac{m_1}{m_2} \times \\ \times \left\{ \int_0^{\alpha} e^{-y^2} dy - \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \alpha e^{-\alpha^2} \right\}. \quad (9.55)$$

Последнее выражение дает нам среднюю скорость изменения энергии частицы первого сорта, обладающей скоростью  $v_0$ , сталкивающейся с ансамблем частиц второго сорта, для которого действительно распределение Максвелла. Параметр  $\alpha$  выражается следующим образом:

$$\alpha^2 = \frac{m_2 v_0^2}{2kT} = \frac{m_2 W}{m_1 kT}. \quad (9.56)$$

Здесь  $kT$  — температура ансамбля частиц второго сорта, а  $W$  — энергия частицы первого сорта.

Применим формулу (9.55) к передаче энергии от ядерных частиц (протонов, дейтонов,  $\alpha$ -частиц и т. д.) к электронам. Поскольку в этом случае величина  $m_2/m_1$  очень мала, параметр  $\alpha$  будет также мал до весьма больших значений отношения энергии тяжелой частицы к электронной

температуре. Поэтому разложим выражение в фигурной скобке в (9.55) по малым  $\alpha$ , в результате чего получим

$$\begin{aligned} \{ \dots \} &\approx -\frac{m_2}{m_1} \alpha \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{m_1}{m_2} \alpha^2 \right) = \\ &= -\frac{m_2}{m} \left( \frac{m_2}{m_1} \frac{W}{kT} \right)^{1/2} \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{W}{kT} \right). \end{aligned}$$

Вместо того чтобы вычислять величину  $\frac{d\bar{W}}{dt}$ , разделим выражение (9.55) на  $v_0$  и получим таким образом потери энергии на единицу длины пути

$$\frac{d\bar{W}}{dx} \approx -N_2 \frac{4 \sqrt{\pi} Z_1^2 Z_2^2 e^4}{\sqrt{W kT}} \ln \left( \frac{2}{\theta_m} \right) \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \left( \frac{W}{\frac{3}{2} kT} - 1 \right). \quad (9.57)$$

Это выражение справедливо вплоть до энергий тяжелых частиц, исчисляемых миллионами электронвольт, в том случае, если температура электронов не менее 1 кэВ.

Для потерь энергии быстрой частицей, взаимодействующей с коллективом частиц сравнимой массы, для которых справедливо распределение Максвелла,  $\alpha$  имеет большую величину. Тогда фигурная скобка приблизительно равна  $\sqrt{\pi/2}$  и

$$\frac{d\bar{W}}{dx} \approx -N_2 \frac{2\pi Z_1^2 Z_2^2 e^4}{W} \ln \left( \frac{2}{\theta_m} \right) \frac{m_1}{m_2}. \quad (9.58)$$

Данное выражение может быть использовано для нахождения передачи энергии от быстрых электронов к электронам или от быстрых нуклонов к нуклонам. Следует отметить, что потери энергии тяжелых частиц с энергией в несколько мегаэлектронвольт в результате ядерного взаимодействия могут почти равняться потерям в результате кулоновского рассеяния, даваемых выражением (9.58).

При вычислении  $\ln(2/\theta_m)$  следует помнить, что номограмма на рис. 8.6 действительна лишь в предположении, что величина  $\frac{1}{2} m v^2$  [в выражениях (8.34) и (8.35)] примерно равна  $\frac{1}{2} kT_{\text{электр}}$ , где  $m$  — приведенная масса, а  $v$  — средняя относительная скорость. Для случая, соответствующего

уравнению (9.57), это предположение справедливо, и указанной номограммой можно пользоваться. Однако оно не верно для случая, описываемого выражением (9.58), и здесь необходимо пользоваться непосредственно выражениями (8.34) и (8.35).

В заключение рассмотрим среднюю скорость обмена энергией двух коллективов частиц, обладающих максвелловскими распределениями. Для этого проинтегрируем выражение (9.55) по  $v_0$ , предварительно умножив его на

$$4\pi v_0^2 \left( \frac{m_1}{2\pi k T_1} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_1 v_0^2}{2k T_1}}.$$

Величина  $kT$  из выражения (9.56) теперь обозначена  $kT_2$ . Проще использовать в качестве переменной интегрирования  $\alpha$  вместо  $v_0$ . Поступая таким образом, найдем

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{W}(1)}{dt} = & -N_2 \frac{8\sqrt{\pi} Z_1^2 Z_2^2 e^4}{m_1} \ln\left(\frac{2}{\theta_m}\right) \frac{m_1}{m_2} \left(\frac{m_1}{2\pi k T_1}\right)^{3/2} 4\pi \frac{2k T_2}{m_2} \times \\ & \times \left[ \int_0^\infty e^{-\beta\alpha^2} \alpha d\alpha \int_0^\alpha e^{-y^2} dy - \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \int_0^\infty \alpha^2 e^{-\beta\alpha^2} e^{-\alpha^2} d\alpha \right], \end{aligned}$$

где

$$\beta = \frac{m_1 T_2}{m_2 T_1}.$$

Первый член в квадратных скобках может быть проинтегрирован по частям, после чего все выражение в скобках легко вычислить:

$$\begin{aligned} [\dots] = & \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{1}{\sqrt{\beta+1}} \left\{ \frac{1}{\beta} - \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \frac{1}{\beta+1} \right\} = \\ = & \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{m_2^{5/2} T_1^{3/2}}{m_1 T_2} \frac{T_1 - T_2}{(m_2 T_1 + m_1 T_2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Используя этот результат, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{W}(1)}{dt} = & -N_2 4\sqrt{2} \pi Z_1^2 Z_2^2 e^4 \ln\left(\frac{2}{\theta_m}\right) \times \\ & \times \frac{\sqrt{m_1 m_2} (kT_1 - kT_2)}{(m_1 kT_2 + m_2 kT_1)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (9.59)$$

Это выражение дает среднее значение энергии, передаваемой в единицу времени от частиц первого сорта частицам второго сорта, в расчете на одну частицу первого сорта. Несмотря на приближенный способ учета рассеяния на малые углы, это выражение обращается в нуль, как и должно быть, при  $T_1 = T_2$ .

Сравним скорость передачи энергии для случаев взаимодействия электронов с электронами, ионов с ионами и электронов с ионами, предполагая, что разность температур при этом небольшая. Тогда скорость передачи энергии будет определяться массой частиц. Для электрон-электронных взаимодействий коэффициент равен  $1/\sqrt{m_e}$ , для ион-ионных  $1/\sqrt{m_i}$  и для электрон-ионных  $(1/\sqrt{m_i}) \sqrt{m_e/m_i}$ . Скорость обмена энергией, таким образом, наименьшая в случае системы электроны-ионы. Это естественно, так как при столкновениях частиц с сильно отличающимися массами передача энергии мала. Малость скорости обмена энергией электронов и ионов означает, что электроны и ионы, взаимодействующие между собой, могут иметь максвелловские распределения по скоростям, характеризующиеся различными температурами.

Электроны и ионы могут достичь равновесия по отдельности значительно раньше, чем обмен энергией между ними может этому помешать.

В случае передачи энергии от ионов к электронам тогда, когда температура ионов много меньше умноженной на  $m_i/m_e$  температуры электронов (что обычно соблюдается), выражение (9.59) имеет более простой вид

$$\frac{dW(i)}{dt} = -N_e 4 \sqrt{2\pi} Z_i^2 e^4 \ln\left(\frac{2}{\theta_m}\right) \frac{\sqrt{m_e} (kT_i - kT_e)}{m_i (kT_e)^{3/2}}. \quad (9.60)$$

## § 9.8. Уравнение Фоккера — Планка

В предшествующем параграфе моменты приращений скорости были использованы для вычисления средней скорости передачи энергии. Они могут также быть применены для вывода упрощенной формы интеграла столкновений, соответствующего так называемому уравнению Фоккера — Планка. В этом параграфе выведем эту форму интеграла столкновений.



Пусть  $G(\mathbf{v}_0, \Delta \mathbf{v}) d\mathbf{v}_1$  — вероятность рассеяния в единицу времени частицы с начальной скоростью  $\mathbf{v}_0$  в интервал скоростей  $d\mathbf{v}_1$  с изменением при этом ее скорости на  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0$ . Тогда скорость изменения функции распределения этих частиц в результате столкновений будет равна

$$\left. \frac{\partial f_1(\mathbf{v}_1)}{\partial t} \right|_c = -f_1(\mathbf{v}_1) \int G(\mathbf{v}_1, \Delta \mathbf{v}) d(\Delta \mathbf{v}) + \int f_1(\mathbf{v}_0) G(\mathbf{v}_0, \Delta \mathbf{v}) d\mathbf{v}_0. \quad (9.61)$$

Первый член справа соответствует частицам, покидающим элементарный объем вокруг точки  $\mathbf{v}_1$  в результате рассеяния, а второй — попадающим в него по той же причине. Таким образом, мы просто записали интеграл столкновений в сжатом виде.

Покажем, что подынтегральное выражение во втором интеграле зависит от  $\mathbf{v}_0$  как явным образом, так и при помощи выражения  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0$ , где  $\mathbf{v}_1$  — постоянная.

Представим явную зависимость от  $\mathbf{v}_0$  в виде ряда Тэйлора

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{v}_0) G(\mathbf{v}_0, \Delta \mathbf{v}) &= f_1(\mathbf{v}_1) G(\mathbf{v}_1, \Delta \mathbf{v}) + \\ &+ (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1)_i \frac{\partial}{\partial v_{1i}} f_1(\mathbf{v}_1) G(\mathbf{v}_1, \Delta \mathbf{v}) + \\ &+ \frac{1}{2} (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1)_i (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1)_j \frac{\partial}{\partial v_{1i}} \frac{\partial}{\partial v_{1j}} f_1(\mathbf{v}_1) G(\mathbf{v}_1, \Delta \mathbf{v}) + \dots \end{aligned}$$

Подставив далее это разложение во второй интеграл равенства (9.61) и заменяя переменную интегрирования  $\mathbf{v}_0$  на  $\Delta \mathbf{v}$ , получим

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f_1(\mathbf{v}_1)}{\partial t} \right|_c &= -\frac{\partial}{\partial v_{1i}} f_1(\mathbf{v}_1) \int \Delta v_i G(\mathbf{v}_1, \Delta \mathbf{v}) d(\Delta \mathbf{v}) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v_{1i}} \frac{\partial}{\partial v_{1j}} f_1(\mathbf{v}_1) \int \Delta v_i \Delta v_j G(\mathbf{v}_1, \Delta \mathbf{v}) d(\Delta \mathbf{v}) + \dots \end{aligned}$$

Интегралы в последнем выражении совпадают с моментами  $\Delta \mathbf{v}$ , вычисленными в § 9.7, если в них  $\mathbf{v}_0$  заменить  $\mathbf{v}_1$ .

Поэтому, используя обозначения этого параграфа, можно написать

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(\mathbf{v}_1)}{\partial t} \Big|_c = & - \frac{\partial}{\partial v_{1i}} [f_1(\mathbf{v}_1) (\overline{\Delta v_i})_{v_1}] + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v_{1i}} \frac{\partial}{\partial v_{1j}} [f_1(\mathbf{v}_1) (\Delta v_i \Delta v_j)_{v_1}] + \dots \end{aligned} \quad (9.62)$$

Если опустить члены более высокого порядка, которые обозначены многоточием, то мы получим интеграл столкновений в приближении Фоккера — Планка. Отбрасываемые члены будут малы тогда, когда

$$\overline{\Delta v} \frac{\partial}{\partial v_1} f_1(v_1) \ll 1, \quad (9.63)$$

т. е. если  $f_1(\mathbf{v}_1)$  не будет испытывать сильных изменений на интервалах, сравнимых со средним изменением скорости при столкновениях. Поскольку основная часть столкновений сопровождается малыми изменениями скорости, можно ожидать, что приближение Фоккера — Планка будет достаточно точным, если, конечно,  $f_1(\mathbf{v}_1)$  не будет иметь разрывов или очень больших градиентов.

Если воспользоваться результатами § 9.7, то интеграл столкновений для двух сортов частиц может в этом приближении быть записан следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(\mathbf{v}_1)}{\partial t} \Big|_{12} = & A \left\{ - \frac{m_1}{m} \frac{\partial}{\partial v_{1i}} \left[ f_1(\mathbf{v}_1) \frac{\partial}{\partial v_{1i}} S_2(\mathbf{v}_1) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v_{1i}} \frac{\partial}{\partial v_{1j}} \left[ f_1(\mathbf{v}_1) \frac{\partial}{\partial v_{1i}} \frac{\partial}{\partial v_{1i}} T_2(\mathbf{v}_1) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (9.64)$$

где

$$A = \frac{4\pi Z_1^2 Z_2^2 e^4}{m_1^2} \ln \left( \frac{2}{\theta m} \right). \quad (9.65)$$

Функции  $S_2$  и  $T_2$  определяются выражениями

$$S_2(\mathbf{v}_1) = \int \frac{f_2(\mathbf{v}_1 + \mathbf{u})}{u} d\mathbf{u}; \quad (9.66)$$

$$T_2(\mathbf{v}_1) = \int u f_2(\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}) d\mathbf{u}, \quad (9.67)$$

или, что одно и то же

$$\nabla_{v_1}^2 S_2(\mathbf{v}_1) = -4\pi f_2(\mathbf{v}_1); \quad (9.68)$$

$$\nabla_{v_1}^2 T_2(\mathbf{v}_1) = 2S_2(\mathbf{v}_1). \quad (9.69)$$

Покажем теперь, что эта форма интеграла столкновений не нарушает законов сохранения числа частиц, импульса и энергии. Сохранение числа частиц легко доказывается путем интегрирования уравнения (9.64) по всей области изменения компонент скорости  $\mathbf{v}_1$ . Правая часть исчезает потому, что она содержит производные по компонентам скорости. В результате имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int f_1(\mathbf{v}_1) d\mathbf{v}_1 \right)_{12} = 0, \quad (9.70)$$

т. е. пространственная плотность частиц первого сорта не изменяется в результате столкновений.

Для того чтобы доказать совместимость нашей формы интеграла столкновений с законами сохранения импульса и энергии, рассмотрим сначала частный случай одинаковых частиц и покажем, что при этом не происходит (в среднем) изменения скорости или энергии, и множитель  $m_1/m_2$  в уравнении (9.64) будет равен

$$\frac{m_1}{m_2} = 2. \quad (9.71)$$

Чтобы показать сохранение средней скорости, умножим уравнение (9.64) на любую из компонент скорости  $\mathbf{v}$  (индексы 1 и 2 опускаем) и проинтегрируем по всему пространству скоростей. Тогда слева получим производную по времени от пространственной плотности импульса (деленной на массу частиц), а правая часть будет содержать два члена, каждый из которых, как мы сейчас убедимся, обращается в нуль. Из этого следует, в частности, что каждый из двух членов в правой части уравнения (9.64) совместим с уравнением сохранения импульса.

Первый член после умножения на  $v_k$  и интегрирования по пространству скоростей приводит к выражению

$$\int v_k \frac{\partial}{\partial v_i} f \frac{\partial}{\partial v_i} S d\mathbf{v} = - \int \left( \frac{\partial}{\partial v_i} v_k \right) f \frac{\partial}{\partial v_i} S d\mathbf{v} = \int f \frac{\partial}{\partial v_k} S d\mathbf{v}.$$

Поэтому, согласно уравнению (9.68),  $f$  и  $S$  связаны друг с другом аналогично плотности зарядов  $\rho$  и потенциалу  $\phi$  в электростатике. Последний интеграл в последнем выражении имеет форму, аналогичную  $\int \rho \mathbf{E} d\mathbf{r}$ , т. е. полной силе действия распределенного заряда на самого себя,

которая, как известно, равна нулю. Доказать это очень просто:

$$\begin{aligned} - \int f \frac{\partial}{\partial v_k} S dv &= \frac{1}{4\pi} \int (\nabla_v^2 S) \frac{\partial}{\partial v_k} S dv = \\ &= - \frac{1}{4\pi} \int (\nabla_v S) \frac{\partial}{\partial v_k} (\nabla_v S) dv = - \frac{1}{8\pi} \int \frac{\partial}{\partial v_k} (\nabla_v S)^2 dv = 0. \end{aligned}$$

Если частицы первого и второго сортов отличаются друг от друга, можно показать, что суммарная потеря импульса у частиц одного сорта в точности равна суммарному увеличению его у частиц другого сорта. Доказательство этого аналогично доказательству в электростатике равенства силы, действующей со стороны одного пространственного заряда на другой, силе, действующей на первый со стороны второго.

Второй член в правой части уравнения (9.64) не вызывает вообще изменений в скорости, так как после интегрирования по частям он обращается в нуль:

$$\begin{aligned} \int v_k \frac{\partial}{\partial v_i} \frac{\partial}{\partial v_j} f_1 \frac{\partial}{\partial v_i} \frac{\partial}{\partial v_j} T_2 dv &= - \int \left( \frac{\partial v_k}{\partial v_i} \right) \frac{\partial}{\partial v_j} f_1 \frac{\partial}{\partial v_i} \frac{\partial}{\partial v_j} T_2 dv = \\ &= - \int \frac{\partial}{\partial v_j} f_1 \frac{\partial}{\partial v_k} \frac{\partial}{\partial v_j} T_2 dv = 0. \end{aligned}$$

Совместимость интеграла столкновений в форме Фоккера — Планка с законом сохранения энергии доказывается путем умножения уравнения (9.64) на  $v_k v_k$  (с учетом правила суммирования по повторяющимся индексам) и интегрирования по пространству скоростей. В данном случае два члена в правой части уже не обеспечивают по отдельности сохранения энергии. Если считать частицы обоих сортов идентичными, то первый член справа будет равен

$$- 2A \int v_k v_k \frac{\partial}{\partial v_i} f \frac{\partial}{\partial v_i} S dv = 4A \int v_i f \frac{\partial}{\partial v_i} S dv, \quad (9.72)$$

а второй —

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} \int v_k v_k \frac{\partial}{\partial v_i} \frac{\partial}{\partial v_j} f \frac{\partial}{\partial v_i} \frac{\partial}{\partial v_j} T dv &= - A \int v_i \frac{\partial}{\partial v_j} f \frac{\partial}{\partial v_i} \frac{\partial}{\partial v_j} T dv = \\ &= A \int f \frac{\partial}{\partial v_i} \frac{\partial}{\partial v_i} T dv = 2A \int f S dv. \end{aligned} \quad (9.73)$$

По аналогии с электростатикой ( $f \rightarrow \rho$ ,  $S \rightarrow \varphi$ ) выражение (9.73) соответствует умноженной на  $4A$  потенциальной энергии, а выражение (9.72) — умноженной на  $-4A$  потенциальной энергии кулоновских сил. В обозначениях электростатики доказательство последнего утверждения выглядит следующим образом:

$$\int \rho (\mathbf{r} \cdot \nabla) \varphi d\mathbf{r} = - \int \varphi \nabla (\mathbf{r} \rho) d\mathbf{r} = -3 \int \rho \varphi d\mathbf{r} - \int \varphi (\mathbf{r} \nabla) \rho d\mathbf{r}.$$

С другой стороны, тот же интеграл можно выразить по-иному:

$$\begin{aligned} \int \rho (\mathbf{r} \nabla) \varphi d\mathbf{r} &= - \frac{1}{4\pi} \int (\nabla^2 \varphi) (\mathbf{r} \nabla) \varphi d\mathbf{r} = - \frac{1}{4\pi} \int \varphi \nabla^2 (\mathbf{r} \nabla) \varphi d\mathbf{r} = \\ &= - \frac{1}{4\pi} \int \varphi (\mathbf{r} \nabla) \nabla^2 \varphi d\mathbf{r} - \frac{2}{4\pi} \int \varphi \nabla^2 \varphi d\mathbf{r} = \\ &= \int \varphi (\mathbf{r} \nabla) \rho d\mathbf{r} + 2 \int \varphi \rho d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Складывая оба выражения, получим

$$\int \rho (\mathbf{r} \nabla) \varphi d\mathbf{r} = - \frac{1}{2} \int \rho \varphi d\mathbf{r}, \quad (9.74)$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, оба члена выражений (9.72) и (9.73) взаимно уничтожаются. Если частицы одного сорта не тождественны частицам другого сорта, то легко показать, что потеря энергии частицами одного сорта в точности равна увеличению энергии частиц другого сорта.

Для целей дальнейших вычислений упростим фигурирующие в уравнении (9.64) производные. Воспользовавшись равенствами (9.68) и (9.69), можно найти другую форму для интеграла столкновений в приближении Фоккера — Планка

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \left. \frac{\partial f_1(\mathbf{v})}{\partial t} \right|_{12} &= 4\pi \left( \frac{m_1}{m} - 1 \right) f_1(\mathbf{v}) f_2(\mathbf{v}) - \left( \frac{m_1}{m} - 2 \right) \frac{\partial f_1}{\partial v_i} \frac{\partial S_2}{\partial v_i} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial v_i \partial v_j} \frac{\partial^2 T_2}{\partial v_i \partial v_j}. \end{aligned} \quad (9.75)$$

Для одинаковых частиц

$$\frac{1}{A} \left. \frac{\partial f_1(\mathbf{v})}{\partial t} \right|_{11} = 4\pi f_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial v_i \partial v_j} \frac{\partial^2 T_1}{\partial v_i \partial v_j}. \quad (9.76)$$

Вероятно, в общем виде нельзя показать, что интеграл столкновений в форме Фоккера — Планка не приводит к росту  $H$ -функции, т. е. к уменьшению энтропии. Можно, однако, убедиться, что этот интеграл столкновений обращается в нуль для случая распределения Максвелла. Для изотропного распределения по скоростям уравнение (9.76) упрощается:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial f(v)}{\partial t} \Big|_{11} = 4\pi f^2 + \frac{1}{v^2} \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial T}{\partial v} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \frac{\partial^2 T}{\partial v^2}. \quad (9.77)$$

При выводе последнего выражения используется следующее свойство оператора дифференцирования по компонентам  $v_j$ :

$$\frac{\partial}{\partial v_j} = \frac{v_j}{v} \frac{\partial}{\partial v}. \quad (9.78)$$

Для функции

$$f(v) = e^{-v^2}$$

получим

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{2\pi}{v} \int_0^v e^{-u^2} du; \\ \frac{\partial T}{\partial v} &= \frac{\pi}{v} e^{-v^2} - \frac{\pi}{v^2} \int_0^v e^{-u^2} du + 2\pi \int_0^v e^{-u^2} du; \\ \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} &= \frac{2\pi}{v^3} \int_0^v e^{-u^2} du - \frac{2\pi}{v^2} e^{-v^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.79)$$

Читатель может самостоятельно проверить этот результат и убедиться, что он приводит к обращению правой части уравнения (9.77) в нуль.

Уравнение типа Фоккера — Планка было применено Макдональдом и др. \* к расчету времени релаксации для системы частиц, имевших в начальный момент изотропное распределение по скоростям, причем такое, что энергия каждой частицы одинакова. Уравнение решалось численными методами. Было получено, что с течением времени

\* W. M. MacDonald et al. Phys. Rev., 107, 350 (1957).

распределение стремится к максвелловскому. При этом в области больших значений скорости максвелловское распределение устанавливается позже, чем при меньших скоростях. Приблизительно основная часть максвелловского распределения формируется за время  $T_1$ , определяемое из выражения

$$\frac{1}{T_1} = N\sigma v = N \cdot \bar{v} \cdot \frac{4\pi e^4}{m_1^2 \bar{v}^4} \ln \left( \frac{2}{\theta_m} \right), \quad (9.80)$$

где  $\bar{v}$  — среднеквадратичная скорость. Авторы этой работы сделали в аналитической форме оценку времени  $T_v$ , необходимого для формирования «хвоста» максвелловского распределения вплоть до значения скорости  $v$ , которое оказалось равным

$$T_v = \frac{m_1^2 v^3}{12\pi N e^4} \cdot \frac{1}{\ln \left( \frac{2}{\theta_m} \right)}. \quad (9.80')$$

Эта величина по существу равна времени столкновения для частиц, обладающих скоростью  $v$ .

## § 9.9. Электропроводность плазмы

При воздействии на плазму слабого электрического поля и отсутствии магнитного поля (или параллельности последнего электрическому) электроны и ионы начинают двигаться в противоположных направлениях, образуя ток. Средняя относительная скорость электронов и ионов будет возрастать до того момента, пока электрические силы не уравниваются «трением», вызванным столкновениями этих двух сортов частиц. После достижения такого равновесия устанавливается стационарное состояние. Функции распределения не становятся при этом равновесными, поскольку происходит выделение тепла в количестве  $c(\mathbf{j} \cdot \mathbf{E})$  на единицу объема ( $\mathbf{j}$  — в электромагнитных, а  $\mathbf{E}$  — в электростатических единицах). Однако если количество тепла, выделяемого за время одного столкновения, невелико, то функцию распределения можно считать почти равновесной. Количество выделяющегося тепла можно сделать как угодно малым путем уменьшения величины  $\mathbf{E}$ .

Поскольку ионы и электроны приобретают равные и противоположные по знаку импульсы, почти весь ток будет обусловлен электронами, так что вкладом ионов в ток можно пренебречь. Кроме того, если температуры ионов и электронов имеют сравнимую величину, относительная скорость в электрон-ионных столкновениях почти полностью определяется скоростью электрона. Учитывая сказанное, можно без сильного влияния на окончательные результаты считать ионы покоящимися, а их температуру равной нулю.

Будем считать, что электрическое поле действует в направлении оси  $z$ . Уравнение Больцмана для электронов тогда будет иметь вид

$$-\frac{eE}{m_e} \frac{\partial}{\partial v_z} f_e(\mathbf{v}) = \left. \frac{\partial f_e}{\partial t} \right|_{ee} + \left. \frac{\partial f_e}{\partial t} \right|_{ei}. \quad (9.81)$$

Здесь заряд электрона обозначен ( $-e$ ). Интегралы столкновений возьмем в форме Фоккера — Планка.

Если напряженность электрического поля невелика, функция  $f_e$  только мало будет отличаться от максвелловской. Поэтому ее можно представить следующим образом:

$$f_e(\mathbf{v}) = f_0(\mathbf{v}) + f_1(\mathbf{v}), \quad (9.82)$$

где  $f_0(\mathbf{v})$  — максвелловская функция распределения, а  $f_1$  мало по сравнению с  $f_0$ . Подставим выражение (9.82) в уравнение (9.81) и сохраним члены не выше первого порядка малости. Сумма членов нулевого порядка равна интегралу столкновений для равновесного случая, который, как было установлено в § 9.8, равен нулю.

Левая часть уравнения (9.81) с точностью до членов первого порядка имеет вид

$$\begin{aligned} -\frac{eE}{m_e} \frac{\partial}{\partial v_z} f_0(\mathbf{v}) &= \frac{eE}{m_e} N_e \left( \frac{m_e}{2\pi kT_e} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{m_e v_z}{kT_e} e^{-\frac{m_e v^2}{2kT_e}} = \\ &= \frac{eE}{kT_e} N_e \left( \frac{m_e}{2\pi kT_e} \right)^{\frac{3}{2}} v \cos \theta e^{-\frac{m_e v^2}{2kT_e}}, \end{aligned} \quad (9.83)$$

где  $\theta$  — угол между направлением скорости  $v$  и осью  $z$ . Интеграл электрон-электронных столкновений с точ-



ностью до членов первого порядка равен, согласно уравнению (9.76),

$$8\pi f_0 f_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial v_i \partial v_j} \frac{\partial^2 T_0}{\partial v_i \partial v_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial v_i \partial v_j} \frac{\partial^2 T_1}{\partial v_i \partial v_j}, \quad (9.84)$$

где температура также разложена по степеням малости

$$T_e = T_0 + T_1. \quad (9.85)$$

Теперь  $f_0$  и  $T_0$  зависят только от абсолютной величины скорости  $v$ . Поэтому, получим, используя, например, уравнение (9.78)

$$\frac{\partial^2 T_0}{\partial v_j \partial v_i} = \frac{\partial}{\partial v_i} \frac{v_j}{v} \frac{\partial T_0}{\partial v} = \frac{\delta_{ij}}{v} \frac{\partial T_0}{\partial v} + \frac{v_i v_j}{v} \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{v} \frac{\partial T_0}{\partial v}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_1}{\partial v_i \partial v_j} \frac{\partial^2 T_0}{\partial v_i \partial v_j} &= \left( \frac{1}{v} \frac{\partial T_0}{\partial v} \right) \nabla_v^2 f_1 + \\ &+ \left( \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{v} \frac{\partial T_0}{\partial v} \right) v_i v_j \frac{\partial}{\partial v_i} \frac{\partial}{\partial v_j} f_1. \end{aligned} \quad (9.86)$$

Далее

$$\begin{aligned} v_i v_j \frac{\partial}{\partial v_i} \frac{\partial}{\partial v_j} f_1 &= v_i \frac{\partial}{\partial v_i} v_j \frac{\partial}{\partial v_j} f_1 - v_i \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial v_i} f_1 = \\ &= v \frac{\partial}{\partial v} v \frac{\partial}{\partial v} f_1 - v \frac{\partial}{\partial v} f_1 = v^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} f_1. \end{aligned}$$

Таким образом, в интеграле столкновений (9.84) все операторы, действующие на функции первого приближения, суть либо производные по абсолютной величине  $v$ , либо имеют вид  $\nabla_v^2$ . Собственными функциями таких операторов являются сферические гармоники, такие, как  $\cos \theta$ . Поскольку левая часть уравнения (9.83) зависит от  $\theta$  как  $\cos \theta$ , такая же зависимость должна быть у  $f_1$  и  $T_1$ . Остающаяся задача — определение радиальной зависимости  $f_1$  (т. е. зависимости от  $v$ ) сводится к решению интегрального уравнения, поскольку  $T_1$  выражена через интеграл от  $f_1$ . Это интегральное уравнение было численно решено Ландсхоффом \* путем разложения функции  $f_1$

\* R. L a n d s h o f f. Phys. Rev., 76, 904 (1949); 82, 442 (1951). Ландсхофф также рассмотрел некоторые другие явления переноса.

по полиномам Лагерра. Полученное им выражение для проводимости в отсутствие магнитного поля и для  $Z_1 = Z_2 = 1$  равно

$$\sigma = j/E = 1,97 \frac{Ne^2}{m_e c \nu_c}, \quad (9.87)$$

где  $j$  — в электромагнитных,  $E$  — в электростатических единицах, а  $\nu_c$  — частота столкновений, равная

$$\nu_c = \frac{4V\sqrt{2\pi}}{3} \frac{Ne^4}{(kT_e)^2} \left(\frac{kT_e}{m_e}\right)^{1/2} \ln\left(\frac{2}{\theta_m}\right). \quad (9.88)$$

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что плотность электронов  $N$  выпадает из выражения для  $\sigma$ , которое оказывается пропорциональным  $(kT_e)^{3/2}$ .

Выражая для случая водорода проводимость в практических единицах, получим

$$\sigma \left(\frac{MO}{CM}\right) = 192 (T_e (\text{эВ}))^{3/2} / \ln\left(\frac{2}{\theta_m}\right). \quad (9.89)$$

При больших напряженностях электрического поля изложенная теория перестает быть справедливой. Если электрическое поле столь велико, что за время между столкновениями электрон приобретает энергию, сравнимую с  $kT_e$ , то предположение о квазиравновесности функций распределения, очевидно, не годится. Таким образом, условие применимости изложенной теории состоит в том, чтобы скорость электронов, приобретаемая за время между столкновениями, была мала в сравнении с их тепловой скоростью, т. е.

$$\frac{eE}{m_e \nu_c} \ll \sqrt{\frac{kT_e}{m_e}}. \quad (9.90)$$

В практических единицах для случая водорода это условие имеет вид

$$E \left(\frac{\text{В}}{CM}\right) \ll 7 \cdot 10^{-14} \frac{N (CM^{-3})}{T (\text{эВ})} \cdot \ln\left(\frac{2}{\theta_m}\right). \quad (9.91)$$

Как видно из этого неравенства, условие применимости изложенной теории для плазмы низкой плотности довольно легко может быть нарушено.

Поскольку резерфордское сечение рассеяния убывает обратно пропорционально квадрату энергии частицы,

то в случае, если частица между столкновениями успевает приобрести энергию, сравнимую с ее начальной энергией, она может перейти в режим непрерывного ускорения, не испытывая при этом вообще столкновений. Это явление, известное под названием «убегающих электронов», было изучено Дрэйсером \*.

Следует сделать еще одну оговорку по поводу приведенного выше расчета проводимости. В этом расчете полагалось, что состояние плазмы лишь слегка отклоняется от равновесия. В то же время получаемая в лаборатории или наблюдающаяся в природе плазма обычно далека от равновесия. Действительно, уже само прохождение тока через плазму может возбудить в ней волны или создать турбулентность одного из многих типов. Поскольку в турбулентной плазме могут возникать электрические поля, превышающие приложенное, принято считать, что проводимость реальной плазмы, как и другие характеристики явлений переноса в ней, может сильно отличаться от рассчитанных для равновесной плазмы.

---

\* Д р э й с е р. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958». Избранные доклады иностранных ученых. Т. 1. М., Атомиздат, 1959, стр. 170.

## ДИФФУЗИЯ В ОБЫЧНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПОПЕРЕК НАПРАВЛЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

### § 10.1. Введение

В гл. 9 была рассмотрена вызываемая столкновениями диффузия в пространстве скоростей при оправданных предположениях, что внешние силы отсутствуют, а функция распределения не зависит от координат. Мы убедились в том, что столкновения приводят с течением времени к установлению максвелловского распределения по скоростям.

В настоящей главе будет исследовано влияние пространственной неоднородности плотности и температуры плазмы. Мы найдем, что столкновения вызывают диффузию частиц и энергии в обычном пространстве, стремящуюся выравнять начальные неоднородности в плотности и температуре. Рассмотрим только тот случай, когда имеется внешнее магнитное поле и средние характеристики плазмы мало меняются на протяжении ларморовского радиуса.

### § 10.2. Конфигурации, соответствующие тепловому равновесию

Аналогично случаю диффузии в пространстве скоростей можно найти то состояние, к которому приводят в пределе столкновения, т. е. состояние равновесия. И в этом случае удобно обратиться к  $H$ -функции Больцмана. Введем величину  $H_T$ :

$$H_T \equiv \int H d\mathbf{r} = \int f \ln f dv d\mathbf{r}. \quad (10.1)$$

Представим себе, что наша система помещена в трехмерную потенциальную яму, стенки которой достаточно высоки для того, чтобы отражать все частицы. Тогда интегрирование достаточно распространить только на объем потенциальной ямы.

Посмотрим, как  $H_T$  меняется с течением времени. Для этого рассмотрим значение  $H_T$  в два бесконечно близких момента времени  $t_0$  и  $t_1$ , так что  $\delta t = t_1 - t_0$  — бесконечно малая величина.

Разобьем в момент  $t_0$  объем фазового пространства на большое число элементов  $\delta V_i(t_0)$  (где  $i = 1, 2, 3, \dots$ ). Тогда величина  $H_T(t_0)$  может быть аппроксимирована суммой

$$[H_T^s(t_0) = \sum_i f_i \ln f_i \Big|_{t_0} \delta V_i(t_0), \quad (10.2)$$

где  $f_i$  — среднее значение  $f$  для каждого элемента фазового объема. Посмотрим, что будет происходить в следующие близкие моменты времени. Под влиянием средних полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  точки фазового пространства, представляющие отдельные частицы, слегка изменят свое положение. Считая, что элементарные объемы  $\delta V_i$  движутся вслед за частицами таким же образом, как сами частицы двигались бы в отсутствие столкновений, определим  $\delta V_i(t_1)$ .

Когда столкновения отсутствуют, значения функции  $f_i$  в системе координат, связанной с движущейся частицей, не зависят от времени. Так как число частиц в каждом элементе объема не меняется с течением времени (в отсутствие столкновений), величины  $\delta V_i(t_0)$  и  $\delta V_i(t_1)$  должны быть равны. Напомним для полной ясности, что альтернативной формулировкой теоремы Лиувилля является требование сохранения фазового объема.

В момент  $t_1$

$$H_T(t_1) = \sum_i f_i \ln f_i \Big|_{t_1} \delta V_i(t_1), \quad (10.3)$$

где  $f_i$  — средние значения  $f$  в новых элементах объема. Отметим, что новые элементы  $\delta V_i(t_1)$  содержат все частицы и не перекрываются, так как траектории частиц в фазовом пространстве в отсутствие столкновений не пересекаются.

Вычитая уравнение (10.2) из (10.3) и используя равенство  $\delta V_i(t_1) = \delta V_i(t_0)$ , получим при переходе к бесконечно малым элементам объема

$$\frac{dH_T}{dt} = \int dr \int dv \frac{D}{Dt} (f \ln f), \quad (10.4)$$

где  $D/Dt$  — субстанциональная производная (берется вдоль траектории движения частицы).

Для любой заданной точки  $r$  интеграл по  $v$  в уравнении (10.4) должен быть меньше или равен нулю, причем он равен нулю только в том случае, если распределение по скоростям в этой точке максвелловское. Последнее следует из выводов гл. 9. Таким образом, величина  $dH_T/dt$  будет меньше нуля, если распределение  $f$  не является максвелловским во всех точках пространства. Равновесная функция распределения имеет вид

$$f(r, v) = \alpha(r) e^{-\beta(r) v^2}, \quad (10.5)$$

где  $\alpha$  — величина, пропорциональная плотности частиц, а  $\beta$  равно

$$\beta(r) = \frac{m}{2kT(r)}. \quad (10.6)$$

Пока мы оставляем в стороне распределение с неравной нулю средней скоростью, но позднее к нему вернемся.

Для определения  $\alpha$  и  $\beta$  необходимо подставить выражение (10.5) в уравнение Больцмана. Правая часть уравнения при этом обращается в нуль, производная по времени от  $f$  также равна нулю, как и величина  $[\mathbf{v}\mathbf{B}] \nabla_v f$ . Поэтому уравнение Больцмана приобретает вид

$$\mathbf{v} \nabla_r f + \frac{e}{m} (\mathbf{E} \cdot \nabla_v f) = 0$$

или после учета равенства (10.5)

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla \alpha) - \alpha v^2 (\mathbf{v} \cdot \nabla \beta) - 2 \frac{e}{m} \alpha \beta (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) = 0, \quad (10.7)$$

где градиенты относятся к обычному пространству. Поскольку полученное уравнение должно быть справедливо при любом значении  $\mathbf{v}$ , коэффициенты при всех степенях  $\mathbf{v}$  должны равняться нулю по отдельности. В силу этого

$\nabla\beta$  обращается в нуль, что означает независимость температуры от координат, и, кроме того,

$$\nabla\alpha - \frac{e}{kT} \alpha \mathbf{E} = 0. \quad (10.8)$$

Это уравнение может быть удовлетворено лишь для потенциальных полей  $\mathbf{E}$ , таких, при которых

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi(\mathbf{r}). \quad (10.9)$$

В частности, это справедливо для статического поля. Для таких полей получаем из уравнения (10.8)

$$\alpha = \alpha_0 e^{-\frac{e\varphi(\mathbf{r})}{kT}},$$

где  $\alpha_0$  — постоянная. Равновесная функция распределения, таким образом, имеет вид

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \alpha_0 e^{-\frac{e\varphi(\mathbf{r})}{kT} - \frac{mv^2}{2kT}}. \quad (10.10)$$

Это распределение известно как распределение Максвелла — Больцмана.

Читателю предоставляется возможность самостоятельно убедиться в том, что равновесное распределение с не равной нулю средней скоростью  $\mathbf{v}_0$  может осуществляться только при условии, что электрическое и магнитное поля «движутся» с той же скоростью, т. е. что в движущейся со скоростью  $\mathbf{v}_0$  системе эти поля статические. Тепловое равновесие, естественно, может реализовываться лишь при отсутствии движения со средней скоростью относительно стенок потенциальной ямы.

Можно показать, что распределение Максвелла — Больцмана соответствует абсолютному минимуму функции  $H_T$ , когда число частиц и полная энергия (включая потенциальную) постоянны. Доказательство этого мало отличается от аналогичной теоремы, приведенной в § 9.3. Поскольку все другие возможные распределения соответствуют большим значениям  $H_T$  и отрицательным значениям  $dH_T/dt$ , они должны асимптотически приближаться с течением времени к распределению Максвелла — Больцмана.

В любой реальной физической системе стенки не являются, конечно, неизменными потенциальными барьерами, а обладают некоторыми динамическими свойствами

и могут испытывать тепловые колебания, в результате чего в конечном итоге температуры плазмы и ограничивающих ее стенок выравниваются.

Из выражения (10.10) видно, что магнитное поле совершенно не влияет на состояние теплового равновесия. Это означает, что для достаточно больших промежутков времени ограничивающее влияние постоянного магнитного поля исчезает. Постоянное магнитное поле может лишь временно удерживать плазму, которая постепенно за счет столкновений будет диффундировать, стремясь к распределению (10.10). В этой главе мы попытаемся провести расчет диффузии поперек направления магнитного поля.

### § 10.3. Отклонение от теплового равновесия

Приступим к вычислению переноса частиц и энергии (теплопроводности) для случая, когда распределение плотности не является равновесным. Будем, однако, считать градиенты малыми величинами и попытаемся вычислить зависимость потока массы и потока тепла от этих градиентов в линейном приближении.

Градиент магнитного поля не может вызывать потоков массы или тепла, поскольку равновесное распределение, при котором эти потоки отсутствуют, не зависит от магнитного поля. Следовательно, с точностью до первого порядка можно считать магнитное поле постоянным. Пусть оно направлено по оси  $z$  и абсолютная величина его напряженности равна  $B$  (рис. 10.1). Будем считать, что градиенты температуры и плотности направлены по оси  $x$ , т. е.  $N$  и  $T$  не зависят от  $y$  и  $z$ .

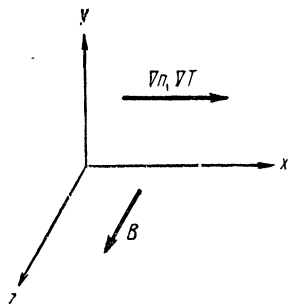


Рис. 10.1. Ориентация поля  $\mathbf{B}$  и градиентов  $N$  и  $T$  при диффузии.

Каково будет распределение частиц в отсутствие столкновений? Проще всего для ответа на этот вопрос рассмотреть поведение ларморовских окружностей. Предположим сначала, что все поля, кроме  $\mathbf{B}$ , отсутствуют. Тогда ларморовские окружности будут связаны с одной и той же



линией  $\mathbf{B}$ , и, следовательно, значение их координаты  $x$  не изменяется. Далее, вращающиеся частицы обладают постоянной (во времени) поперечной слагающей скорости  $v_{\perp}$  и постоянной параллельной скоростью  $v_z$ . Следовательно, в качестве функции распределения ларморовских окружностей можно выбрать любую функцию вида  $F(x, v_{\perp}, v_z)$ . Необходимо только не забывать, что  $v_{\perp}$  — скорость частицы, а не ее ларморовской окружности. Подобное распределение остается неизменным во времени, если нет столкновений. Можно в качестве такого распределения выбрать распределение Максвелла. Оставляя обоснование этого временно в стороне, положим

$$F(x, v_{\perp}, v_z) = N(x) \left( \frac{m}{2\pi kT(x)} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT(x)}}, \quad (10.11)$$

где  $N$  и  $T$  — произвольные функции  $x$ , а

$$v^2 = v_{\perp}^2 + v_z^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2. \quad (10.12)$$

Плотность ларморовских окружностей равна  $N(x)$ . Видоизменим распределение (10.11) с тем, чтобы учесть влияние других полей. Электрическое или гравитационное поле, направленное по оси  $x$ , вызовет стационарный дрейф в направлении оси  $y$ , который будет складываться со скоростями всех частиц. Поскольку  $N$  и  $T$  предполагаются не зависящими от  $y$ , распределение  $F$  остается равновесным, но его средняя скорость будет отличаться от нуля. При напряженностях электрического и гравитационного полей, равных  $E_x$  и  $g_x$ , скорость дрейфа  $v_d$  вдоль оси  $y$  будет равна:

$$v_d = -\frac{cF_x}{B} - \frac{g_x}{\omega}, \quad (10.13)$$

где  $\omega$  — ларморовская частота

$$\omega = \frac{eB}{mc}. \quad (10.14)$$

Теперь, видоизменив функцию распределения ларморовских окружностей, получим

$$F = N(x) \left( \frac{m}{2\pi kT(x)} \right)^{\frac{3}{2}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{m}{2kT(x)} [v_x^2 + (v_y - v_d)^2 + v_z^2] \right\}. \quad (10.15)$$

В направлении оси  $z$  не должно действовать никаких внешних сил, поскольку это привело бы к возникновению быстрых изменений в функции распределения, значительно превышающих влияние диффузии. Наша задача сейчас состоит в вычислении диффузии в равновесных конфигурациях. Гравитационная сила в направлении оси  $y$  обуславливает дрейф в направлении оси  $x$ , который при наличии неоднородностей плотности ( $\nabla N \neq 0$ ) приводит к разделению зарядов. Конечным результатом действия этой силы является свободное падение плазмы в направлении оси  $y$ , как это было показано в гл. 3. Поэтому силу  $g_y$  можно не учитывать.

Электрическое поле, направленное по оси  $y$ , заставляет всю плазму как целое двигаться в направлении оси  $x$ . Поскольку подобное поле может быть обращено в нуль выбором системы координат, его действие также не существенно. Будем пока считать, что поле  $E_y$  отсутствует, однако впоследствии мы еще к нему возвратимся. По сути дела поле  $E_x$  тоже можно было бы исключить при помощи преобразований, но для наглядности результатов мы его сохраним в выражении (10.13).

При соблюдении указанных условий выражение (10.15) дает плотность ларморовских окружностей в фазовом пространстве. Определим теперь плотность частиц в фазовом пространстве. Ларморовской окружности с координатами  $x, v_x, v_y, v_z$  в фазовом пространстве, очевидно, соответствует частица с координатами  $x - \frac{v_y}{\omega}, v_x, v_y, v_z$ . Можно показать, что  $v_y/\omega$  — компонента ларморовского радиуса вдоль оси  $x$  и она должна вычитаться из  $x$ . Следовательно, функции распределения ларморовских окружностей и частиц связаны соотношением:

$$f(x, v_x, v_y, v_z) = F\left(x + \frac{v_y}{\omega}, v_x, v_y, v_z\right). \quad (10.16)$$

В силу этого функция распределения частиц, соответствующая выражению (10.15), определяется как

$$f = N\left(x + \frac{v_y}{\omega}\right) \left(\frac{m}{2\pi kT\left(x + \frac{v_y}{\omega}\right)}\right)^{\frac{3}{2}} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{m}{2kT\left(x + \frac{v_y}{\omega}\right)} [v_x^2 + (v_y - v_d)^2 + v_z^2]\right\}. \quad (10.17)$$

Непосредственной подстановкой в уравнение Лиувилля можно доказать, что эта функция является его решением при наличии полей  $E_x$ ,  $g_x$  и  $B_z$ . Общее равновесное решение имеет вид

$$f = F \left[ x + \frac{v_y}{\omega}, v_x^2 + (v_y - v_d)^2 + v_z^2, v_z \right].$$

Однако нами выбран максвелловский вид распределения (10.17).

Интеграл столкновений нельзя вычислить, пока не уточнен вид функций  $N$  и  $T$ . Не определяя вида этих функций точно, предположим, что они мало меняются на протяжении ларморовского радиуса и, следовательно, могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned} N \left( x + \frac{v_y}{\omega} \right) &\approx N(x) + \frac{v_y}{\omega} N'(x); \\ T \left( x + \frac{v_y}{\omega} \right) &\approx T(x) + \frac{v_y}{\omega} T'(x). \end{aligned} \quad (10.18)$$

Штрихами здесь обозначены производные по  $x$ . Одновременно предполагается, что скорость  $v_d$  мала по сравнению со средней тепловой скоростью. Разлагая  $f$  с учетом малости  $N'$ ,  $T'$  и  $v_d$  и опуская члены выше первого порядка малости, получим

$$\begin{aligned} f &\approx N(x) \left( \frac{m}{2\pi kT(x)} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \times \\ &\times \left\{ 1 + v_y \left[ \frac{N'}{\omega N} + \frac{T'}{\omega T} \left( \frac{mv^2}{2kT} - \frac{3}{2} \right) + \frac{mv_d}{kT} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (10.19)$$

Из выражения (10.19) видно, что в этом приближении пространственная плотность остается равной  $N(x)$ , так как члены, пропорциональные  $v_d$ , при интегрировании по скорости исчезают.

Итак, функция  $f$ , определяемая выражением (10.19), есть приближенная функция распределения в отсутствие столкновений, точность которой определяется малостью величин  $N'$ ,  $T'$  и  $v_d$ . Поскольку влияние столкновений еще не было принято во внимание, обозначим эту функцию  $f^{(0)}$ .

## § 10.4. Возмущения, вносимые столкновениями

В этом параграфе будет учтено влияние столкновений и найдена поправка  $f^{(1)}$  к функции  $f^{(0)}$ . Функция  $f^{(1)}$  будет описывать потоки энергии и частиц в направлении оси  $x$ .

Учет столкновений может быть произведен двумя эквивалентными способами. Согласно первому способу, следят за траекторией, описываемой центрами ларморовских окружностей. Когда частица испытывает столкновение, центр ее ларморовской окружности делает как бы скачок. Можно взять за основу такие скачки центров ларморовских окружностей и, используя метод случайных блужданий, выразить потоки массы и энергии через среднюю и среднеквадратичную величины скачков до первого порядка малости. Второй способ, которому мы будем следовать ниже, состоит в вычислении функции распределения частиц путем решения уравнения Больцмана\*.

Для двух сортов частиц (ионов и электронов) уравнение Больцмана можно сокращенно записать в виде

$$\frac{D}{Dt} f_1 = C(f_1 f_2) + C(f_1 f_2), \quad (10.20)$$

где индексы соответствуют сортам частиц, а  $C$  — оператор интеграла столкновений. Предположим, что интегралы столкновений малы по сравнению с величинами в левой части уравнения. Главный вклад в левую часть уравнения вносит член  $\frac{e}{mc} ([vB] \nabla_v f)$ , поскольку остальные члены пропорциональны малым величинам  $E_x$ ,  $g_x$  и оператору  $\nabla_r$ . Член  $\frac{e}{mc} ([vB] \nabla_v f)$  соответствует искривлению траектории частиц в магнитном поле. Поэтому, если интегралы столкновений малы по величине, время столкновения оказывается больше периода ларморовского вращения, т. е.

$$\omega \tau_c \gg 1. \quad (10.21)$$

Малость интегралов столкновений позволяет надеяться найти решения уравнения (10.20) методом итераций. Умно-

---

\* Метод ларморовских окружностей использовался в статье С. L. Longmire, M. N. Rosenbluth. Phys. Rev., 103, 507 (1956). Метод уравнения Больцмана излагается в соответствии с работой М. N. Rosenbluth, A. N. Kaufman Phys. Rev., 109, 1 (1958).

жим правую часть этого уравнения на параметр  $\lambda$ , который впоследствии положим равным единице. Тогда

$$\frac{D}{Dt} f_1 = \lambda \{C(f_1 f_2) + C(f_1 f_2)\}. \quad (10.22)$$

Разложив  $f_1$  и  $f_2$  в ряд по степеням  $\lambda$ , получим

$$f_1 = f_1^{(0)} + \lambda f_1^{(1)} + \lambda^2 f_1^{(2)} + \dots \quad (10.23)$$

и аналогичное выражение для  $f_2$ . Приравняв члены при одинаковых степенях  $\lambda$  нулю, получим систему уравнений

$$\frac{D}{Dt} f_1^{(0)} = 0; \quad (10.24)$$

$$\frac{D}{Dt} f_1^{(1)} = C(f_1^{(0)} f_1^{(0)}) + C(f_1^{(0)} f_2^{(0)}) \quad (10.25)$$

и так далее.

Уравнение (10.24) удовлетворяется функцией  $f^{(0)}$ , найденной в предыдущем параграфе [выражение (10.19)]. Чтобы найти поправку к этой функции, обусловленную столкновениями, необходимо решить уравнение (10.25).

Рассмотрим интеграл столкновений  $C(f_1^{(0)} f_2^{(0)})$ . Для краткости представим функцию  $f^{(0)}$  следующим образом:

$$f^{(0)}(v) = f^{(m)}(v) [1 + v_y \varphi(v)], \quad (10.26)$$

где  $f^m$  — ее максвелловская часть,

$$f^m(v) = N(x) \left( \frac{m}{2\pi kT(x)} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}, \quad (10.27)$$

а

$$\Phi(v) = \frac{N'}{\omega N} + \frac{T'}{\omega T} \left( \frac{mv^2}{2kT} - \frac{3}{2} \right) + \frac{mv_d}{kT}. \quad (10.28)$$

Отметим, что  $f^{(m)}$ , как и  $\varphi$ , — функции только абсолютной величины скорости  $v$ . Также нужно отметить, что  $\varphi$  зависит от массы и заряда рассматриваемых частиц. В зависимости от сорта частиц функция  $\varphi$  будет принимать значения  $\varphi_1$  или  $\varphi_2$ .

Предположим, что температура  $T(x)$  имеет одно значение для обоих сортов частиц, а плотности  $N_1(x)$  и  $N_2(x)$  различаются.

Используя указанные обозначения, получим с точностью до первого порядка малости

$$C (f_1^{(0)} f_2^{(0)}) = f^{(m)}(v_1) \int \int f_2^{(m)}(v_2) [v'_{1y} \Phi_1(v'_1) + v_{2y} \Phi_2(v'_2) - v_{1y} \Phi_1(v_1) - v_{2y} \Phi_2(v_2)] \times \times \frac{\sigma}{v} \cdot \delta \cdot \delta \cdot dv'_1 dv'_2 dv_2. \quad (10.29)$$

При получении этого результата был учтен тот факт, что интеграл столкновений стремится к нулю для максвелловского распределения и что

$$f_1^{(m)}(v'_1) f_2^{(m)}(v'_2) = f_1^{(m)}(v_1) f_2^{(m)}(v_2) \quad (10.30)$$

в соответствии с законом сохранения энергии.

Все функции в правой части выражения (10.29) являются скалярами в пространстве скоростей, за исключением величин  $v_y$ . Поэтому, если величины  $v_y$  заменить соответствующим им вектором  $\mathbf{v}$ , все выражение также станет некоторым вектором  $\mathbf{C}$ . Единственная переменная, по которой не производится интегрирование, это вектор  $\mathbf{v}_1$ ; и по соображениям симметрии ясно, что вектор  $\mathbf{C}$  должен быть коллинеарен  $\mathbf{v}_1$ . Из тех же соображений следует, что абсолютная величина вектора  $\mathbf{C}$  не зависит от направления вектора  $\mathbf{v}_1$ . Поэтому можно написать

$$\mathbf{C} = v_1 g(v_1), \quad (10.31)$$

где  $g(v_1)$  — некоторая функция абсолютной величины вектора  $\mathbf{v}_1$ . Интеграл столкновений (10.29) есть тогда слагающая вдоль оси  $y$  этого вектора

$$C (f_1^{(0)} f_2^{(0)}) = v_{1y} g(v_1). \quad (10.32)$$

Этого вывода уже достаточно, чтобы решить уравнение Больцмана в первом приближении (10.25). Оба интеграла столкновений в этом уравнении будут иметь вид (10.32), хотя функции  $g$  для них неодинаковы. Обозначим эти функции  $g_{11}$  и  $g_{22}$ . С точностью до первого порядка по малым величинам уравнение (10.25) может быть приведено к виду

$$-\frac{e_1}{m_1 c} (\mathbf{B} \cdot [\mathbf{v}_1 \nabla_{v_1}] f_1^{(1)}(\mathbf{v}_1)) = v_{1y} [g_{11}(v_1) + g_{12}(v_1)]. \quad (10.33)$$

Члены, содержащие  $E_x \frac{\partial f_1}{\partial v_{1x}}$  и  $g_x \frac{\partial f_1}{\partial v_{1x}}$ , имеют второй порядок малости, так как  $E_x$ ,  $g_x$  и  $f_1$  — сами малые величины первого порядка. Уравнение (10.33) можно упростить, если ввести в пространстве скоростей сферические координаты  $v_1$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ , причем ось  $z$  (вдоль которой направлено магнитное поле  $\mathbf{B}$ ) должна соответствовать  $\theta=0$ :

$$v_{1x} = v_1 \sin \theta \cos \varphi; \quad v_{1y} = v_1 \sin \theta \sin \varphi; \quad v_{1z} = v_1 \cos \theta.$$

В этой системе координат оператор  $[\mathbf{v}_1 \nabla_{v_1}]_z$  принимает вид  $\partial/\partial\varphi$ . Поэтому уравнение (10.33) можно записать в виде

$$-\omega_1 \frac{\partial}{\partial \varphi} f_1^{(1)} = v_1 \sin \theta \sin \varphi [g_{11}(v_1) + g_{12}(v_1)].$$

Решение его равно

$$\begin{aligned} f_1^{(1)} &= \left( \frac{v_{1y}}{\omega} \sin \theta \cos \varphi \right) [g_{11}(v_1) + g_{12}(v_1)] = \\ &= \frac{v_{1y}}{\omega_1} [g_{11}(v_1) + g_{12}(v_1)]. \end{aligned} \quad (10.34)$$

Представим теперь, например, величину  $v_{1x} g_{12}(v_1)$  как компоненту вектора  $\mathbf{C}$  вдоль оси  $x$  [выражение в правой части равенства (10.29), в котором вместо  $v_y$  фигурирует  $v_x$ ]. Поэтому

$$\begin{aligned} f_1^{(1)}(\mathbf{v}_1) &= \\ &= \sum_{i=1,2} \frac{1}{\omega_1} f_1^{(m)}(v_1) \iiint f_1^{(m)}(v_2) [v'_{1x} \Phi_1(v_1) + v'_{2x} \Phi_i(v_2) - \\ &- v_{1x} \Phi_1(v_1) - v_{2x} \Phi_i(v_2)] \frac{\sigma}{v} \delta \cdot \delta \cdot dv'_1 dv'_2 dv_2. \end{aligned} \quad (10.35)$$

### § 10.5. Диффузия частиц

Вычислим теперь потоки частиц и энергии, соответствующие поправке  $f_1(\mathbf{v}_1)$ , путем определения моментов этой функции.

Во-первых, из выражения (10.34) следует

$$\int f_1^{(1)}(\mathbf{v}_1) dv_1 = 0. \quad (10.36)$$

Таким образом,  $f_1$  не изменяет пространственной плотности частиц, которая остается равной  $N_1$ .

Далее рассмотрим моменты первого порядка, описывающие потоки частиц. Как легко заметить из уравнения (10.29),  $f^{(0)}$  не дает вклада в поток вдоль оси  $x$ . Однако этой функции соответствует поток в направлении оси  $y$ . Этот поток входит в уравнение баланса давлений, которое обсудим несколько позже. Наконец, член, обусловленный столкновениями, вызывает поток вдоль оси  $x$ , т. е. в направлении градиентов плотности и температуры, а также сил, создающих дрейф. Этот поток частиц равен

$$F_1 = \int v_{1x} f_1^{(1)}(\mathbf{v}_1) d\mathbf{v}_1 = F_{11} + F_{12}, \quad (10.37)$$

где  $F_{11}$  и  $F_{12}$  соответствуют столкновениям с частицами соответственно первого и второго сорта.

Величины  $F_{11}$  и  $F_{12}$  могут быть вычислены путем подстановки обоих членов выражения (10.35) в интеграл (10.37). Для облегчения вычисления получающегося интеграла удобнее ввести вектор  $f_1^{(1)}$ , который получается, если заменить в выражении (10.35) компоненты  $v_x$  вектором  $\mathbf{v}$ . Тогда, в частности, для  $F_{12}$  имеем

$$\begin{aligned} F_{12} = & \frac{1}{3} \frac{1}{\omega_1} \iiint \int f_1^{(m)}(v_1) f_2^{(m)}(v_2) \{ \mathbf{v}_1 [ \mathbf{v}'_1 \Phi_1(v'_1) + \\ & + \mathbf{v}'_2 \Phi_2(v'_2) - \mathbf{v}_1 \Phi_1(v_1) - \mathbf{v}_2 \Phi_2(v_2) ] \} \times \\ & \times \frac{\sigma}{v} \delta \cdot \delta \cdot d\mathbf{v}'_1 d\mathbf{v}'_2 d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2. \end{aligned} \quad (10.38)$$

Вычисление последнего интеграла довольно утомительно, и мы не будем его здесь проводить детально. Для тех, кто хотел бы это сделать самостоятельно, отметим, что подобный интеграл проще всего вычисляется после преобразования входящих в него переменных к системе центра масс с помощью соотношений (8.27) и (8.28). После интегрирования по  $\mathbf{V}'$  одна из  $\delta$ -функций исчезает, а  $\mathbf{V}'$  заменяется на  $\mathbf{V}$ . Интегрируя затем по модулю  $\mathbf{v}'$ , используем наличие второй  $\delta$ -функции, что приводит к замене  $v'^2$  на  $v^2$ . Замена с самого начала  $\mathbf{V}'$  на  $\mathbf{V}$  и  $v'^2$  на  $v^2$  сильно облегчает вычисление выражения  $v_1[\dots]$  в формуле (10.38). Там, где вектор  $\mathbf{v}'$  все же сохраняется, он должен быть заменен согласно соотношению  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ . Затем проводится



интегрирование по углам вектора  $\mathbf{v}'$ , т. е. по углам рассеяния. Оно может быть проведено очень просто, если считать  $\theta/2$ , где  $\theta$  — угол рассеяния переменной интегрирования, как в §9.7. В результате помимо члена с  $\ln(2/\theta_m)$  получается еще ряд членов, даже конечных, если не проводить обрезания по углам. Однако эти члены примерно в 10 раз меньше члена с  $\ln(2/\theta_m)$  и поэтому могут быть опущены. Наконец, проводится интегрирование по  $V$  и  $v$ . Часть членов в окончательном результате оказывается равной нулю, а оставшиеся дают

$$\begin{aligned}
 F_{12} = & -\frac{4}{3} \frac{c^2 e_2^2}{B^2} \left( \frac{2\pi m}{kT} \right)^{1/2} \ln \frac{2}{\theta_m} N_1 N_2 \left\{ \frac{N'_1}{N_1} - \frac{e_1}{e_2} \frac{N'_2}{N_2} + \right. \\
 & + \frac{T'}{T} \left[ \frac{e_1}{M} \left( \frac{m_1}{e_1} - \frac{m_2}{e_2} \right) + \frac{e_1 m_1}{2M} \left( \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} \right) - \frac{1}{2} \right] + \\
 & \left. + \frac{e_1 B}{ckT} (v_{d1} - v_{d2}) \right\}. \quad (10.39)
 \end{aligned}$$

Здесь  $m_1, m_2, e_1, e_2$  — массы и заряды двух сортов частиц;  $m$  — приведенная масса, равная  $m_1 m_2 / M$ , а  $M = m_1 + m_2$ .

Из выражения (10.39) можно получить и  $F_{11}$ , если заменить в нем везде индекс 2 на 1, тогда

$$F_{11} = 0. \quad (10.40)$$

Этот результат означает, что столкновения частиц первого сорта между собой не приводят к появлению суммарного потока частиц в данном приближении. Обращение величины  $F_{11}$  в нуль — результат случайный.

Никакой из основных законов типа закона сохранения импульса не требует, чтобы поток частиц при их столкновении между собой был равен нулю. Действительно, если в разложении, приводящем к выражению (10.19), сохранить производные выше первого порядка, то поток  $F_{11}$  оказывается отличным от нуля. Однако поправки высшего порядка оказываются несущественными, если  $N$  и  $T$  меняются мало на протяжении ларморовского радиуса.

Выражение  $F_{12}$  для частиц различного сорта не равно нулю. Сформулируем наши выводы для случая, представляющего наибольший интерес, именно для случая водорода, когда  $e_1 = -e_2 = e$ . (Впрочем, формула, которую мы

выведем, будет справедлива для любого однократно ионизованного газа.) В этом случае получим

$$F_1 = F_{12} = -\frac{4}{3} \frac{c^2 e^2}{B^2} \left(\frac{2\pi m}{kT}\right)^{1/2} \ln \frac{2}{\theta_m} N_1 N_2 \times \\ \times \left\{ \frac{(N_1 N_2)'}{N_1 N_2} + \frac{1}{2} \frac{T'}{T} + \frac{Mg_x}{kT} \right\}. \quad (10.41)$$

(Приведенная масса практически совпадает с массой электрона.) При получении выражения (10.41) было использовано выражение для гравитационного и других дрейфов. Отметим, что скорость электрического дрейфа выпала из окончательного выражения в соответствии с тем, что она имеет одну и ту же величину для обоих сортов частиц.

Поскольку выражение (10.41) симметрично по индексам 1 и 2, можно заключить, что поток электронов равен потоку ионов. Поэтому, если плазма первоначально нейтральна и  $N_1 = N_2$ , это свойство будет соблюдаться в процессе диффузии. Этот вывод, однако, перестает быть справедливым, если учесть высшие производные  $N$  и  $T$ , или при  $e_1 \neq -e_2$ .

Интересно рассмотреть вклад, вносимый в поток гравитационным дрейфом, с точки зрения теоремы о равновесии. Пусть плазма приходит в равновесное состояние при наличии гравитационного поля. Тогда, согласно статистической механике, плотности частиц будут равны

$$N_1 = N_{10} \exp\left(-\frac{m_1 g_x x}{kT} - \frac{e\varphi}{kT}\right);$$

$$N_2 = N_{20} \exp\left(-\frac{m_2 g_x x}{kT} + \frac{e\varphi}{kT}\right),$$

где  $\varphi(x)$  — устанавливающийся при равновесии электростатический потенциал. Температура при равновесии не зависит от  $x$ . Поэтому поток частиц должен обращаться в нуль, что действительно наблюдается. Это соответствует компенсации членов  $(N_1 N_2)' / N_1 N_2$  и  $Mg_x / kT$ . В этом случае нам совсем не нужно знать распределение электрического потенциала. Этот вывод справедлив вне зависимости от равенства зарядов частиц.

С взаимным уничтожением скоростей электрического дрейфа частиц обоих сортов связан один любопытный парадокс. Как может плазма достичь равновесного распре-

ления вида  $N_1 = N_{10} \exp(-e\phi/kT)$ , если электрическое поле  $E = -d\phi/dx$  не вызывает никакого дрейфа? Ведь если поток частиц отсутствует, то

$$N_1 = \text{const} \quad \text{и} \quad N_2 = \text{const}.$$

Ответ связан с выводами теории относительности. Постоянное электрическое поле, направленное вдоль оси  $x$ , может быть исключено переходом к системе координат, движущейся вдоль оси  $y$ . Система, в которой плазма достигает равновесия безотносительно к внешним силам, не может быть определена. Только в результате взаимодействия со стенками камеры эта система может быть конкретизирована. Ею, естественно, может быть только система, в которой стенки покоятся. Можно представить себе, что градиент электрического поля вызывает поток частиц и влияние стенок распространяется внутрь плазмы, приводя к установлению распределения вида  $\exp(-e\phi/kT)$ .

### § 10.6. Некоторые решения уравнений диффузии в изотермическом случае

Как будет вести себя плазма, если позволить ее частицам диффундировать в магнитном поле?

Предположим для простоты, что магнитное поле, направленное вдоль оси  $z$ , постоянно, а все остальные условия не зависят от  $z$ . Будем также считать, что гравитационными эффектами можно пренебречь, а в начальный момент температура не зависит от координат. По мере проникновения магнитного поля внутрь объема плазмы возбуждается электрическое поле, а температура повышается. Однако изменения температуры малы в том случае, если магнитное давление много больше кинетического, что мы будем предполагать. Будем также считать, что  $T$  не зависит от координат и времени, отложив оправдание этого предположения до § 10.8.

Закон сохранения числа частиц первого сорта имеет вид

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} + \nabla \mathbf{F}_1 = 0, \quad (10.42)$$

где

$$\mathbf{F}_1 = -\alpha \nabla N_1^2, \quad (10.43)$$

а

$$\alpha = \frac{4}{3} \frac{c^2 e^2}{B^2} \left( \frac{2\pi m}{kT} \right)^{1/2} \ln \frac{2}{\theta_m}. \quad (10.44)$$

При выводе соотношения (10.42) предполагалось, что  $N_1 = N_2$ . Будем считать  $\alpha$  постоянной величиной. Поскольку  $\alpha$  зависит от  $B$ , необходимо предположить, что кинетическое давление мало по сравнению с магнитным.

В противном случае для сохранения баланса давлений нам пришлось бы предположить, что  $B$  существенно зависит от  $N_1$ . Помимо этого, мы должны считать кулоновский логарифм величиной постоянной. Комбинируя уравнения (10.42) и (10.43), получим

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = \alpha \nabla^2 N_1^2. \quad (10.45)$$

Это уравнение определяет функцию  $N_1(r, t)$  по ее значению  $N(r, t_0)$ , заданному в момент  $t_0$ .

Поскольку уравнение (10.45) нелинейно, общее решение его найти трудно. Некоторое представление о поведении решения этого уравнения дает рассмотрение его автомодельных решений. При нахождении этих решений предполагаем, что они имеют вид

$$N_1 = t^a n\left(\frac{r}{t^b}\right), \quad (10.46)$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные, определяемые в процессе подстановки этого решения в уравнение. Введем новую переменную

$$\xi = \frac{r}{t^b}.$$

Подставив решение (10.46) в уравнение (10.45), получим

$$at^{a-1} n\xi - bt^{a-1} (\xi \nabla n(\xi)) = \alpha t^{2a-2b} \nabla^2 n^2(\xi). \quad (10.47)$$

В последнем уравнении оператор  $\nabla$  соответствует дифференцированию по  $\xi$ . Так как  $n(\xi)$  зависит только от  $\xi$ , члены с различными степенями  $t$  сокращаются. Отсюда получаем условие

$$a = 2b - 1. \quad (10.48)$$

Любой из параметров  $a$  и  $b$  можно выбирать произвольно.

Одним из интересных для нас решений будет такое, которое соответствует наличию на определенном расстоянии стенок, поглощающих частицы. В этом случае функция  $n$  должна обращаться в нуль при двух определенных значениях  $g$ . Отсюда следует, что

$$b = 0, \quad a = -1. \quad (10.49)$$

Рассмотрим два типа конфигураций — плоскую и осесимметричную. Уравнение (10.47) для этих конфигураций принимает вид

$$-n(x) = \alpha \frac{d^2}{dx^2} n^2(x) \quad (\text{плоский случай}); \quad (10.50)$$

$$-n(r) = \frac{\alpha}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} n^2(r) \quad (\text{осесимметричный случай}). \quad (10.51)$$

Пусть поглощающие стенки расположены при  $x = \pm R$ ,  $r = R$ . Введем новые переменные  $x/R$  и  $r/R$ . Для этих переменных уравнения (10.50) и (10.51) сохраняют прежний вид, за исключением замены  $\alpha$  на  $\alpha/R^2$ . Заменяя  $n$  на  $\alpha n$ , можно исключить  $\alpha$  из уравнения. В результате этих преобразований выражение (10.46) для плотности частиц приобретает вид

$$N_1(x, t) = \frac{R^2}{\alpha t} n\left(\frac{x}{R}\right). \quad (10.52)$$

Граничное условие для  $n$  состоит в том, что эта функция должна обращаться в нуль при значениях своего аргумента, равных  $\pm 1$ , и на этом интервале должна быть больше нуля. Эти условия удовлетворяются только для одного значения величины  $n(0)$ , поэтому решение — единственное. Уравнение (10.50) может быть решено аналитически, а уравнение (10.51) — только численно.

Решения данных уравнений изображены на рис. 10.2. Используя их и уравнение (10.52), можно определить время, за которое плотность частиц уменьшается в два раза:

$$t_{1/2} = \frac{R}{\alpha N_0} \times \begin{cases} 0,448 & (\text{плоский случай}); \\ 0,208 & (\text{осесимметричный случай}) \end{cases} \quad (10.53)$$

( $N_0$  — плотность частиц в начальный момент в точке 0).

Второй интересный тип решения соответствует случаю отсутствия стенок, когда плазма может диффундировать свободно во все стороны. В этом случае необходимо потребовать постоянства во времени полного числа частиц,

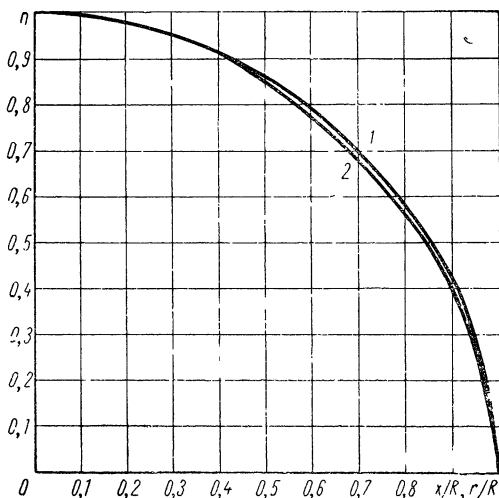


Рис. 10.2. Решение уравнения диффузии для поглощающих стенок:

1 — решение для плоского случая, умноженное на  $(0,448)^{-1}$ ; 2 — решение для цилиндра, умноженное на  $(0,208)^{-1}$ . Выбор такого масштаба позволяет проиллюстрировать близкое подобие этих решений.

т. е. величина  $\int N_1 dx$  или  $\int N_1 r dr$  должна быть постоянной. Из этого условия получаются следующие соотношения, определяющие  $a$  и  $b$ :

$$\begin{aligned} a + b &= 0 \quad (\text{плоский случай}); \\ a + 2b &= 0 \quad (\text{осесимметричный случай}). \end{aligned} \tag{10.54}$$

Решая эти уравнения совместно с уравнением (10.48), получим

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{3}, \quad b = \frac{1}{3} \quad (\text{плоский случай}); \\ a &= -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{4} \quad (\text{осесимметричный случай}). \end{aligned} \tag{10.55}$$

Дифференциальное уравнение (10.47) тогда приобретает вид

$$-\frac{1}{3} n(\xi) - \frac{1}{3} \xi \frac{dn}{d\xi} = \alpha \frac{d^2}{d\xi^2} n^2 \text{ (плоский случай);} \quad (10.56)$$

$$-\frac{1}{2} n(\xi) - \frac{1}{4} \xi \frac{dn}{d\xi} = \frac{\alpha}{\xi} \frac{d}{d\xi} \xi \frac{d}{d\xi} n^2 \text{ (осесимметричный случай).} \quad (10.57)$$

В отличие от линейного уравнения диффузии эти уравнения определяют решения, обращающиеся в нуль при конечных значениях координат; т. е. плазма занимает вполне определенный объем в каждый момент времени. Пусть  $N_1$  в момент  $t_0$  обращается в нуль в точках  $x = \pm R$ ,  $r = R$ . Аналогично предшествующему типу решений можно опять выбрать новые переменные  $\xi$  так, что решение обращается в нуль в точках  $\xi = \pm 1$  и 1, а  $\alpha$  исчезает из уравнений. Решения уравнений (10.56) и (10.57) по счастливой случайности находятся очень просто и равны

$$n(\xi) = \frac{1}{12} (1 - \xi^2) \text{ (плоский случай);} \quad (10.58)$$

$$n(\xi) = \frac{1}{16} (1 - \xi^2) \text{ (осесимметричный случай).} \quad (10.59)$$

Соответствующие выражения для плотности частиц равны

$$N_1(x, t) = \frac{R^2}{12 \alpha t_0^{2/3} t^{1/3}} \left[ 1 - \left( \frac{x}{R} \right)^2 \left( \frac{t_0}{t} \right)^{2/3} \right] \text{ (плоский случай);} \quad (10.60)$$

$$N_1(r, t) = \frac{R^2}{16 \alpha t_0^{1/2} t^{1/2}} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{t_0}{t} \right)^{1/2} \right] \text{ (осесимметричный случай).} \quad (10.61)$$

Если  $N_0$  — плотность в начале координат в момент  $t_0$ , а начальный радиус  $R$ , то время, необходимое для увеличения радиуса вдвое, равно

$$t_2 = \frac{R^2}{a N_0} \times \begin{cases} \frac{7}{12} & \text{(плоский случай),} \\ \frac{15}{16} & \text{(осесимметричный случай).} \end{cases} \quad (10.62)$$

Необходимо заметить, что есть и другие виды авто-модельных решений\*.

### § 10.7. Баланс давлений и сопротивление плазмы

Моменты второго порядка функции распределения образуют тензор потока импульса. Из вида функции  $f_1$  [выражение (10.34)] следует, что она не вносит вклада в тензор потока импульса:

$$\int v_{1i} v_{1j} f_1^{(1)}(\mathbf{v}_1) d\mathbf{v}_1 = 0. \quad (10.63)$$

Закон сохранения импульса или баланса давлений имеет тот же вид, что и в случае распределения  $f^{(0)}$ , определяемого выражением (10.19). Для простоты ограничимся в этом параграфе случаем, когда  $e_1 = -e_2 = e$ , плазма нейтральна, т. е.  $N_1 = N_2$ , и пренебрежем гравитационными эффектами. Выражение для полного давления тогда имеет вид

$$p = (N_1 + N_2) kT, \quad (10.64)$$

а уравнение баланса давлений

$$\nabla p = [\mathbf{j} \cdot \mathbf{B}], \quad (10.65)$$

где  $\mathbf{j}$  — полный электрический ток (в направлении оси  $y$ ), обусловленный распределениями  $f_1^{(0)}(\mathbf{v}_1)$  и  $f_2^{(0)}(\mathbf{v}_2)$ . Непосредственный расчет величины  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2$  на основе уравнения (10.19) подтверждает справедливость уравнения (10.65).

Дрейф частиц поперек силовых линий магнитного поля может быть скомпенсирован приложением электрического

\* J. C. Holladay. U. S. Atomic Energy Commis. Rept. LA-1962 (1955).



поля вдоль оси  $y$ . Поток частиц первого (или второго) сорта при наличии электрического поля равен

$$F_E = c \frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}]}{B^2} \cdot N_1. \quad (10.66)$$

Приравнивая нулю сумму этого потока и потока в результате диффузии, получим после небольших преобразований

$$c \frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}]}{B^2} N_1 - \frac{c}{B^2} \eta_{\perp} N_1 \left\{ \nabla p - \frac{3}{4} \cdot 2N_1 \cdot \nabla (kT) \right\} = 0. \quad (10.67)$$

Здесь введена новая величина

$$\eta_{\perp} = \frac{4}{3} c e^2 (2\pi m)^{\frac{1}{2}} (kT)^{-\frac{3}{2}} \ln \frac{2}{\theta_m}. \quad (10.68)$$

(Напомним еще раз, что приведенная масса  $m$  очень близка к массе электрона.)

С помощью уравнения (10.65) можно исключить из уравнения (10.67) градиент давления. Умножая получившееся после этого выражение векторно на  $\mathbf{B}$ , получим

$$\frac{1}{\eta_{\perp}} \mathbf{E} = \mathbf{j} + \mu [\nabla kT \cdot \mathbf{B}] / B, \quad (10.69)$$

где

$$\mu = \frac{3}{4} \cdot 2N_1 / B. \quad (10.70)$$

Уравнение (10.69) удовлетворяется в системе координат, в которой плазма в среднем покоится. Ранее было введено электрическое поле для нейтрализации диффузионного дрейфа. Однако даже если бы в первоначальной системе электрическое поле отсутствовало, то в системе, движущейся со скоростью диффузионного дрейфа, в соответствии с уравнением (10.69) появляется электрическое поле.

Согласно этому уравнению, электрическое поле состоит из двух слагаемых, первое из которых соответствует закону Ома  $\eta_{\perp} \mathbf{j}$ . Назовем величину  $\eta_{\perp}$  сопротивлением в направлении, перпендикулярном магнитному полю. Сопротивление в направлении, параллельном магнитному полю, сохраняет то же значение, что и в отсутствие магнитного поля (выведенное в § 9.9). Сравнение этих двух величин дает

$$\eta_{\perp} = 1,97 \eta_{\parallel}. \quad (10.71)$$

Коэффициент 1,97 следует из численных расчетов  $\eta_{\parallel}$ , проведенных Ландсхоффом\*.

Второе слагаемое  $E$  обусловлено градиентом температуры и соответствует термоэлектрическому эффекту. Коэффициент  $\mu$  — термоэлектрическая постоянная. Отметим, что электрическое поле перпендикулярно градиенту  $T$  и  $B$ .

### § 10.8. Теплопроводность

Поток энергии в направлении оси  $x$  равен

$$Q = \int \frac{1}{2} m_1 v_1^2 v_{1x} f_1^{(1)}(\mathbf{v}_1) d\mathbf{v}_1. \quad (10.72)$$

(Функция  $f^{(0)}$  не дает никакого вклада в этот поток.) Для облегчения вычислений здесь также удобно использовать для  $f_1^{(1)}$  вместо выражения (10.35) векторную форму, получающуюся путем замены  $v_x$  на  $\mathbf{v}$ . Тогда выражение для потока энергии, переносимой частицами первого сорта в результате столкновений с частицами второго сорта, будет иметь вид

$$\begin{aligned} Q_{12} = & \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1}{\omega_1} \iiint \int f_1^{(m)}(v_1) f_2^{(m)}(v_2) v_1^2 \times \\ & \times (\mathbf{v}_1 [\mathbf{v}'_1 \Phi_1(v'_1) + \mathbf{v}'_2 \Phi_2(v'_2) - \mathbf{v}_1 \Phi_1(v_1) - \mathbf{v}_2 \Phi_2(v_2)]) \times \\ & \times \frac{\sigma}{v} \cdot \delta \cdot \delta \cdot d\mathbf{v}'_1 d\mathbf{v}'_2 d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2. \end{aligned} \quad (10.73)$$

Вычисление этого интеграла крайне громоздко ввиду большого количества членов. Поэтому здесь целесообразно применить тот же метод, который использовался при вычислении потока частиц. В результате получим

$$\begin{aligned} Q_{12} = & -\frac{2}{3} (2\pi m k T)^{\frac{1}{2}} \frac{e_2^2 c^2}{B^2} \ln \left( \frac{2}{\theta_m} \right) \times \\ & \times N_1 N_2 \left\{ \left[ \frac{N'_1}{N_1} - \frac{e_1}{e_2} \frac{N'_2}{N_2} + \frac{g_x}{kT} \left( m_1 - \frac{e_1}{e_2} m_2 \right) \right] \left[ \frac{5m_1 + 2m_2}{M} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{kT'}{kT} \left[ - \left( 1 - \frac{e_1}{e_2} \right) \left( \frac{15m_1 + 6m_2}{M} \right) + \right. \right. \end{aligned}$$

\* См. сноску на стр. 248. Напомним, что наши выражения для сопротивления соответствуют выражению  $E$  в электростатической, а  $j$  в электромагнитной системе.

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{m_1}{M} - \frac{e_1}{e_2} \frac{m_2}{M} \right) \left( \frac{55 m_1 + 10 m_2}{M} \right) + \left( \frac{m_2}{M} - \frac{e_1}{e_2} \frac{m_1}{M} \right) \times \\
& \times \left( \frac{6 m_1 + 4 m_2}{M} \right) + 2 \left( 1 - \frac{e_1}{e_2} \right) \frac{m_1}{M} + \\
& + 2 \left( 1 + \frac{e_1}{e_2} \right) \frac{m_1}{M} \left( \frac{9 m_2 - m_1}{M} \right) \Big] \quad (10.74)
\end{aligned}$$

( $m$  — приведенная масса, а  $M = m_1 + m_2$ ).

Проанализируем значения  $Q_{12}$  для различных предположений о типе частиц первого и второго сорта. Во-первых, отметим, что для идентичных частиц все члены в фигурных скобках обращаются в нуль, кроме последнего, так что

$$Q_{11} = - \frac{8}{3} (\pi m_1 kT)^{\frac{1}{2}} \frac{e_1^2 c^2}{B^2} \ln \left( \frac{2}{\theta_m} \right) N_1^2 \frac{kT'}{kT}. \quad (10.75)$$

Легко заметить, что  $Q_{ii}$  (для ионов) значительно больше, чем  $Q_{ee}$  (для электронов), из-за присутствия коэффициента  $\sqrt{m_i}$ . В действительности из общего выражения (10.74) легко получить следующие оценки величины потока энергии для различных случаев:

$$\begin{aligned}
Q_{ii} & \sim (m_i)^{\frac{1}{2}}, \\
Q_{ee} & \sim (m_e)^{\frac{1}{2}}, \\
Q_{ie} & \sim \frac{35}{8} (2m_e)^{\frac{1}{2}} \approx 6,2 (m_e)^{\frac{1}{2}}, \\
Q_{ei} & \sim \frac{1}{4} (2m_e)^{\frac{1}{2}} \approx 0,3 (m_e)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \quad (10.76)$$

( $e_e = -e_i$ ). Поскольку даже для водорода  $\sqrt{m_i} = 43 \sqrt{m_e}$ , можно с хорошей точностью считать, что поток энергии, вызываемой градиентом температуры, целиком определяется величиной  $Q_{ii}$ . Этот результат можно уточнить, умножив  $Q_{ii}$  на множитель  $[1 + 7,5(m_e/m_i)^{1/2}]$ , получающийся суммированием всех членов в формулах (10.76).

Из общего выражения (10.74) также следует, что существует поток энергии, вызванный градиентом плотности и гравитационным дрейфом. Соответствующие такому потоку члены не обращаются в нуль только тогда, когда

частицы не идентичны и имеют порядок  $(m_e/m_i)^{1/2}$  по сравнению с  $Q_{ii}$ . Сравнивая эти члены выражения (10.74) с формулой (10.41), можно сделать вывод, что для тех же самых значений градиента плотности и скорости гравитационного дрейфа

$$Q_{ie} + Q_{ei} = \frac{7}{2} F_i kT = \frac{7}{4} (F_i + F_e) kT, \quad (10.77)$$

где  $F_i + F_e$  — полный поток частиц.

В § 10.7, добавив вспомогательное электрическое поле, мы обратили суммарный поток частиц в нуль. Электрическое поле было выбрано таким, чтобы скорость обусловленного им дрейфа

$$\mathbf{v}_E = c \frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}]}{B^2} \quad (10.78)$$

приводила к равенству потоков, вызванных диффузией и электрическим дрейфом:

$$\mathbf{v}_E (N_i + N_e) = -(\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_e). \quad (10.79)$$

Добавим подобное электрическое поле и в рассматриваемом случае. Скорости  $\mathbf{v}_E$  будет соответствовать дополнительный поток энергии

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{Q} &= \mathbf{v}_E \left[ \frac{3}{2} (N_i + N_e) kT \right] + p \mathbf{v}_E = \\ &= \mathbf{v}_E (N_i + N_e) \cdot \frac{5}{2} kT = -\frac{5}{2} (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_e) kT. \end{aligned} \quad (10.80)$$

Приведенное выражение объединяется с членом (10.77), и полный поток энергии в такой «покоящейся» системе будет равен

$$\mathbf{Q} = -K \nabla (kT) + \mu c kT \frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}]}{B}, \quad (10.81)$$

где

$$K = \left( \frac{2m_i}{m_e} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{c}{B^2} N_i^2 kT \cdot \eta_{\perp} \left[ 1 + 6,3 \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (10.82)$$

Величины  $\mu$  и  $\eta_{\perp}$  определены выражениями (10.70) и (10.68). Для дальнейшего уточнения в выражении (10.81) коэффициент  $K$  уменьшен на малую величину, перенесен.

ную во второй член с тем, чтобы члены, пропорциональные градиенту температуры, в формуле (10.77) уравновешивали друг друга.

Поскольку в новой системе координат суммарный поток частиц равен нулю,  $Q$  — только поток тепла, а величина  $K$  — теплопроводность. Появление в выражениях (10.69) и (10.81) одного и того же множителя  $\mu$  соответствует требованию термодинамики (соотношения Онзагера). Если  $N'/N$  и  $T'/T$  сравнимы по величине, то последним членом в формуле (10.81) можно пренебречь.

Сравнение выражений (10.75) и (10.41) показывает, что поток тепла намного больше, чем умноженный на  $kT$  поток частиц, в том случае, если величины  $N'/N$  и  $T'/T$  имеют один порядок:

$$Q \approx \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{\frac{1}{2}} F \cdot kT. \quad (10.83)$$

Таким образом, тепло распространяется значительно быстрее самих частиц, и диффузия частиц протекает практически изотермически. Этот вывод оправдывает предположение, сделанное в § 10.6.

### § 10.9. Квазиравновесный пинч с конечной проводимостью

Пинчем мы назвали в § 3.3 цилиндрическую конфигурацию плазмы, давление в которой компенсируется магнитным полем, вызывающим дрейфовые токи в плазме. Как было установлено, в отсутствие столкновений для поддержания пинча нет нужды в электрическом поле, так как действия магнитного поля и дрейфовых токов взаимно компенсируются.

Если же допустить столкновения между частицами, то плазма начнет диффундировать сквозь силовые линии магнитного поля. Диффузия может, однако, быть нейтрализована приложением электрического поля вдоль оси пинча, так что дрейф, обусловленный электрическим полем и направленный внутрь, компенсирует диффузию частиц. Таким образом, конфигурация и в этом случае получается равновесной. Состояние плазмы при этом нельзя назвать полностью равновесным, поскольку из-за наличия электрического поля в направлении дрейфа тем-

пература будет со временем возрастать. Однако можно пренебречь медленным изменением равновесности. Помимо этого, поскольку энергия переносится быстрее, чем движутся сами частицы, можно считать, что температура постоянна.

Пусть  $r$ ,  $\theta$  и  $z$  образуют правовинтовую систему цилиндрических координат. Электрическое поле  $E$  пусть будет направлено по  $z$  и постоянно, так как плазма считается нейтральной, а  $\text{rot } E = 0$  в статических задачах. Основное магнитное поле пинча направлено вдоль координатных линий  $\theta$ , однако для общности допустим существование магнитного поля и вдоль оси  $z$ .  $B_\theta$  и  $B_z$  будем считать функциями только  $r$ . В такой системе могут существовать токи  $j_\theta$  и  $j_z$ .

Рассмотрение начнем с уравнения

$$\text{rot } \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j}. \quad (10.84)$$

Первым шагом обычно являлась подстановка в это уравнение вместо  $\mathbf{j}$  дрейфовых токов и тока проводимости. Однако было уже показано в § 10.7, что если диффузия частиц компенсируется дрейфом, вызванным электрическим полем, то это поле пропорционально току поперечного дрейфа:

$$j_\perp = \sigma_\perp E_\perp. \quad (10.85)$$

В этом выражении поперечная проводимость  $\sigma_\perp$  равна обратной величине сопротивления  $\eta_\perp$ , определенного формулой (10.68). С другой стороны, часть тока  $j_\parallel$ , параллельного  $\mathbf{B}$ , связана с продольной компонентой  $E$  с помощью рассмотренной в § 9.9 величины  $\sigma_\parallel$ :

$$j_\parallel = \sigma_\parallel E_\parallel. \quad (10.86)$$

Согласно соотношению (10.71),

$$\sigma_\parallel = 1,97 \sigma_\perp. \quad (10.87)$$

Величины  $\sigma_\perp$  и  $\sigma_\parallel$  в изотермической задаче могут считаться постоянными, несмотря на слабую зависимость от плотности, входящую под знаком логарифма  $\ln(2/\theta_m)$ .

Поэтому вместо подстановки дрейфовых токов в уравнение (10.84) удобнее исключить  $\mathbf{j}$  из этого уравнения, используя соотношения (10.85) и (10.86). Для упрощения этой операции найдем сначала продольную и поперечную

слагающие уравнения (10.84), умножив его соответственно скалярно и векторно на  $\mathbf{B}$ :

$$(\mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{B}) = 4\pi (\mathbf{B} \mathbf{j}) = 4\pi \sigma_{\parallel} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}); \quad (10.88)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{B} = 4\pi [\mathbf{B} \mathbf{j}] = 4\pi \sigma_{\perp} [\mathbf{B} \mathbf{E}]. \quad (10.89)$$

Для рассматриваемого случая компоненты  $\text{rot } \mathbf{B}$  равны:

$$\text{rot}_z \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_{\theta};$$

$$\text{rot}_{\theta} \mathbf{B} = -\frac{\partial}{\partial r} B_z;$$

$$\text{rot}_r \mathbf{B} = 0.$$

Уравнения (10.88) и (10.89), записанные в этих компонентах, имеют вид

$$B_z \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_{\theta} - B_{\theta} \frac{\partial}{\partial r} B_z = 4\pi \sigma_{\parallel} B_z E; \quad (10.88')$$

$$B_{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_{\theta} + B_z \frac{\partial}{\partial r} B_z = 4\pi \sigma_{\perp} B_{\theta} E, \quad (10.89')$$

при  $r = 0$ ;  $B_z$  принимает некоторое значение  $B_{z0}$ , а  $B_{\theta}$  обращается в нуль. Этих данных достаточно для интегрирования уравнений. Однако прежде чем приступить к решению уравнений, удобнее преобразовать их к безразмерному виду. Введем новую единицу длины

$$L = \frac{B_{z0}}{4\pi \sigma_{\perp} E} \quad (10.90)$$

и новую координату

$$x = \frac{r}{L}. \quad (10.91)$$

Затем пусть

$$\varphi = \frac{B_z}{B_{z0}}, \quad \psi = \frac{x B_{\theta}}{B_{z0}}. \quad (10.92)$$

Уравнения (10.88') и (10.89') в новых переменных будут иметь вид

$$\begin{aligned} \varphi \psi' - \psi \varphi' &= 1,97 x \varphi; \\ \psi \psi' + x^2 \varphi \varphi' &= x \psi, \end{aligned} \quad (10.93)$$

где штрихи означают дифференцирование по  $x$ . В начале координат  $\varphi = 1$ , а  $\psi = 0$ .

Разрешая систему уравнений (10.93) относительно  $\psi'$  и  $\psi$ , найдем

$$\psi' = \frac{1,97 x^3 \varphi^2 + x \psi^2}{x^2 \varphi^2 + \psi^2}; \quad (10.94)$$

$$\varphi' = -\frac{0,97 x \varphi \psi}{x^2 \varphi^2 + \psi^2}. \quad (10.95)$$

Из уравнения (10.94) следует, что  $\psi$  монотонно возрастает с  $x$ , в силу чего  $\psi$  и  $B_\theta$  всегда положительны. Уравнение (10.95) приводит к монотонному убыванию  $\varphi$  от

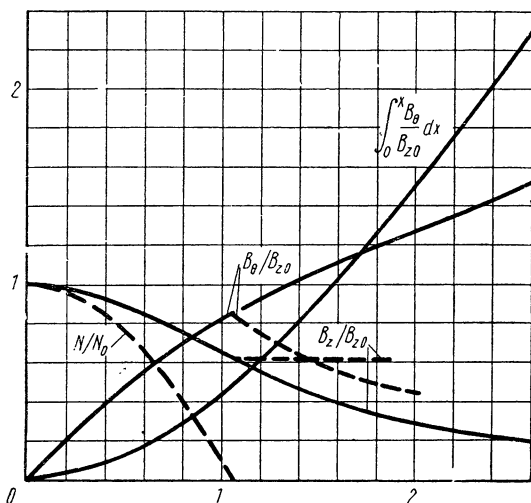


Рис. 10.3. Характеристики квазиравновесного пинча.

единицы в начале координат. Однако  $\varphi$  и  $B_z$  нигде не становятся меньше нуля, а асимптотически стремятся к нулю для больших  $x$ .

Для больших значений

$$\psi \approx \frac{x^2}{2}, \quad B_\theta \approx \frac{r}{2L} B_{z0}; \quad (10.96)$$

$$\varphi \sim B_z \sim x^{-1,94}.$$

Отношения величин  $B_z/B_{z0}$  и  $B_\theta/B_{z0}$ , полученных численным интегрированием, приведены на рис. 10.3.



Наконец, определим плотность частиц из уравнения баланса давлений

$$\nabla(NkT) = [\mathbf{j} \cdot \mathbf{B}]. \quad (10.97)$$

Поскольку величина  $-4\pi[\mathbf{j} \cdot \mathbf{B}]$  получается из уравнений (10.88') и (10.89'), имеем

$$kT \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{B_{z0} B_\theta}{4\pi}$$

или, вводя значение плотности в начале координат  $N_0$ ,

$$\frac{N(x)^{\frac{1}{2}}}{N_0} = 1 - \frac{B_{z0}^2}{4\pi N kT} \int_0^x \frac{B_\theta}{B_{z0}} dx. \quad (10.98)$$

Следовательно,  $N(x)$  обращается в нуль при некотором значении  $x = x_1$ , зависящем лишь от значения отношения магнитного и кинетического давлений в начале координат. Будем считать, что в области  $x > x_1$  нет плазмы. Тогда в этой области магнитное поле будет таким же, как в вакууме, т. е.

$$B_z = \text{const}, \quad B_\theta \sim \frac{1}{x} \quad (x > x_1). \quad (10.99)$$

Значения интеграла, входящего в уравнение (10.98), также графически изображены на рис. 10.3. Пунктирные линии соответствуют на этом рисунке случаю, когда  $\frac{B_{z0}^2}{4\pi N_0 kT} = 2$ .

## УСТОЙЧИВОСТЬ

### § 11.1. Введение

Вопрос о возможности удержания горячей плазмы от контакта со стенками при помощи магнитного поля имеет несколько аспектов. Во-первых, необходимо выяснить, обладают ли усредненные уравнения такими равновесными решениями, согласно которым обеспечивается удержание плазмы магнитным полем. Как было показано, ответ на этот вопрос положительный. Во-вторых, представляет интерес влияние, оказываемое на удержание плазмы ее дискретной структурой, т. е. столкновениями. Было выяснено, что столкновения приводят к диффузии частиц перпендикулярно направлению магнитного поля, так что в пределе давление плазмы не может быть уравновешено давлением магнитного поля, и плазма ограничивается только материальными стенками. Однако, если температура плазмы достаточно высока, диффузия протекает медленно.

Рассмотрим еще один аспект проблемы удержания плазмы — постараемся выяснить, являются ли равновесные решения усредненных уравнений устойчивыми.

Малые отклонения от равновесия всегда имеют место из-за наличия тепловых флуктуаций. В том случае, если такие отклонения нарастают со временем, соответствующее равновесное решение будет, очевидно, неустойчивым.

Проблема устойчивости весьма обширна и привлекает, пожалуй, наибольшее внимание среди всех других аспектов физики плазмы. В этой главе мы не в состоянии полностью осветить ее и потому ограничимся лишь изложением основных причин неустойчивости, а также методов определения устойчивости той или иной конфигурации плазмы.

## § 11.2. Полностью диамагнитная плазма

Рассмотрим сначала идеализированный случай. Предположим, что в области, занимаемой плазмой, полностью отсутствует магнитное поле, в то время как в области, где существует магнитное поле, нет плазмы. Подобное распределение соответствует так называемой полностью диамагнитной плазме.

В такой плазме должен существовать слой конечной толщины, реализующий плавный переход от поля к плазме.

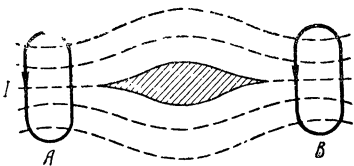


Рис. 11.1. Конфигурация полностью диамагнитной плазмы в установке с магнитными зеркалами.

Однако мы будем считать, что толщина этого слоя много меньше всех размеров, которые существенны в нашей задаче. Одна из возможных равновесных конфигураций такой плазмы изображена на рис. 11.1, где *A* и *B* — две обмотки, по которым течет ток одинакового направления. Магнитные линии изображены пунктиром. Область, занимаемая плазмой, показана штриховкой и представляет тело вращения вокруг оси, проходящей через центры обмоток. Изображенная конфигурация соответствует так называемой установке с магнитными зеркалами. Конечно, не во всякой подобной установке плазму можно считать полностью диамагнитной.

При равновесии давление полностью диамагнитной плазмы должно быть постоянным и не зависеть от координат. Обозначим его  $p_0$ . Силовые линии магнитного поля везде касательны к поверхности плазмы, а в поверхностном слое течет ток, компенсирующий поле внутри объема плазмы. Поскольку натяжение, вызываемое магнитным полем в поверхностном слое, равно  $B^2/8\pi$ , при равновесии должно соблюдаться соотношение

$$B = B_s = \sqrt{8\pi p_0} \quad (\text{на поверхности}). \quad (11.1)$$

Форма равновесной конфигурации плазмы определяется соотношением (11.1), справедливым в каждой точке поверхности. Совершенно ясно, что такое равновесное состояние может быть реализовано. Действительно, так

как при вытягивании и конфигурации плазмы вдоль оси на ее концы действует более сильное магнитное давление, а при ее утолщении это давление увеличивается вокруг средней части, то должна существовать промежуточная конфигурация, при которой давления на концах и в средней части уравниваются. Точное доказательство существования равновесных состояний полностью диамагнитной плазмы было проведено Берковицом \*. Концы рассматриваемой конфигурации «абсолютно острые», т. е. их

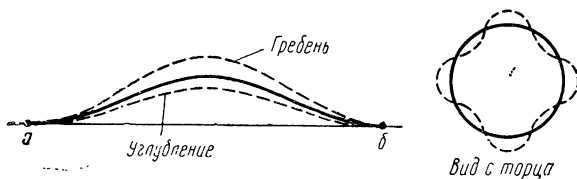


Рис. 11.2. Желобковые возмущения.

внутренний угол стремится к нулю, так что составляющие острие дуги касаются. (На самом деле наша модель несправедлива вблизи концов острия в силу конечной толщины переходного слоя.)

Покажем теперь, что указанная равновесная конфигурация неустойчива, т. е. найдем по крайней мере одно отклонение от нее, которое будет нарастать со временем. Пусть  $r$  и  $\theta$  — две из цилиндрических координат точки на поверхности плазмы. Предположим, что поверхность сместилась на некоторое расстояние  $\delta r$ , следующим образом зависящее от угла  $\theta$ :

$$\delta r = \epsilon r \sin n\theta. \quad (11.2)$$

Здесь  $n$  — любое целое число, включая нуль, а  $\epsilon$  — малая величина. В результате образуется желобчатая поверхность, углубления и гребни которой направлены вдоль невозмущенных силовых линий. Такая деформированная поверхность для  $n = 4$  изображена на рис. 11.2. Сплошные линии на этом рисунке соответствуют невозму-

\* Дж. Берковиц и др. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958». Избранные доклады иностранных ученых, Т. 1, М., Атомиздат, 1959, стр. 109.

щенной поверхности, а пунктирные — деформированной. Концы конфигурации отмечены точками  $a$  и  $b$ . Сравним величину напряженности магнитного поля в углублениях и на гребнях деформированной поверхности. В процессе деформации поверхности плазмы магнитное поле изменяется, приходя в соответствие с новой формой поверхности. Ток, компенсирующий поле, теперь также протекает по указанной новой поверхности. Дивергенция этого тока равна нулю, поскольку плотность тока выражается следующим образом:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{B}.$$

Поэтому накопление зарядов не происходит. Полученная новая конфигурация, очевидно, также равновесна при условии, что к поверхности приложены дополнительные силы, компенсирующие возможное нарушение равенства магнитного и кинетического давлений.

Ввиду симметрии желобчатой конфигурации очевидно, что как вдоль углубления, так и вдоль гребня проходят магнитные силовые линии, которые сливаются в точках  $a$  и  $b$ . Рассмотрим интеграл от напряженности поля  $\mathbf{B}$ , взятый вдоль силовой линии, расположенной в углублении, от точки  $a$  до  $b$ , и затем вдоль силовой линии, идущей по гребню от  $b$  до  $a$ . Будем считать, что этот контур расположен на внешней стороне поверхности. Указанный интеграл должен равняться нулю, поскольку через охватываемую его контуром поверхность не течет никакой ток. Следовательно,

$$\int_a^b (\mathbf{B} d\mathbf{l}) = \int_a^b (\mathbf{B} d\mathbf{l})_{\text{(гребень)}}, \quad (11.3)$$

где  $d\mathbf{l}$  — элемент длины контура. Так как расстояние от  $a$  до  $b$  вдоль гребня больше соответствующего расстояния вдоль углубления, среднее значение  $\mathbf{B}$  на гребне должно быть меньше среднего значения  $\mathbf{B}$  в углублении. Поэтому магнитное давление в углублении больше своего значения на гребне. А поскольку давление плазмы одинаково на всей поверхности, разность давлений будет способствовать увеличению глубины желобков.

Попробуем выразить то же самое на математическом языке. Пусть ось  $z$  направлена вдоль оси симметрии кон-

фигурации. Радиус невозмущенной поверхности представляет собой функцию  $z$ . Тогда элемент длины вдоль гребня или углубления равен

$$dl = dz \sqrt{1 + (1 \pm \varepsilon)^2 \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}, \quad (11.4)$$

где «+» соответствует гребню, а «-» — углублению. Из этой формулы, в частности, ясно следует, что расстояние вдоль гребня больше расстояния вдоль углубления. Пусть поле  $\mathbf{B}$  в углублении имеет вид

$$B(z) = B_s + \delta B(z) \quad (\text{углубление}), \quad (11.5)$$

где  $\delta B(z)$  — малая величина того же порядка, что и  $\varepsilon$ , а  $B_s$  — невозмущенное значение напряженности поля на поверхности. Если  $\varepsilon$  очень мало, то  $B$  на гребне равно

$$B(z) = B_s - \delta B(z) \quad (\text{гребень}). \quad (11.6)$$

Подставив уравнения (11.4) — (11.6) в (11.3) и собрав члены первого порядка по  $\varepsilon$  и  $\delta B$ , получим

$$\int_a^b \delta B \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} dz - \varepsilon B_s \int_a^b \left(\frac{dr}{dz}\right)^2 / \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} \right] dz = 0. \quad (11.7)$$

Из последнего уравнения следует, что среднее значение  $\delta B$  положительно, как было качественно показано раньше.

Чтобы вычислить интегралы в уравнении (11.7), нам необходимо знать точный вид функции  $r(z)$ . Однако, поскольку под знаком второго интеграла стоит существенно положительная величина, использование приближенной зависимости  $r = r(z)$  не сильно повлияет на характер выводов. Например, можно задать  $r(z)$  в виде

$$r(z) = \frac{r_m}{2} \left[ 1 - \cos \frac{2\pi}{L} z \right], \quad (11.8)$$

где  $r_m$  — максимальное значение  $r$ ;  $L$  — расстояние от  $a$  до  $b$ , а начало координат выбрано в точке  $a$ . Когда  $r_m$  достаточно мало по сравнению с  $L$  (т. е. конфигурация сильно вытянутая), из уравнения (11.7) можно получить приближенно среднее значение  $\delta B$

$$\overline{\delta B} = \varepsilon B_s \left(\frac{\pi^2}{2}\right) \left(\frac{r_m}{L}\right)^2. \quad (11.9)$$

Если вместо выражения (11.8) воспользоваться параболической зависимостью, то это приведет лишь к замене множителя  $\pi^2/2$  на  $16/3$ . Соответствующее среднее значение изменения магнитного давления  $\delta p_m = \frac{1}{4\pi} B_s \delta V$  равно

$$\overline{\delta p_m} = \varepsilon \left( \frac{\pi r_m}{L} \right)^2 p_0. \quad (11.10)$$

Давление плазмы с точностью до первого порядка по  $\varepsilon$  не изменяется. (Изменение объема плазмы — величина второго порядка малости в силу его осесимметричной конфигурации.) Таким образом, как и было предсказано выше, давления не уравниваются.

Если эта разность давлений не компенсируется никакими внешними силами на поверхности, то она приведет к росту амплитуды возмущений. Чтобы возмущения могли расти, плазма должна перемещаться из областей, лежащих под углублениями поверхности, в области, расположенные под гребнями. Эти перемещения плазмы происходят под действием силы, соответствующей разности давлений. Используя закон Ньютона, можно написать уравнение

$$\rho_m \frac{dv}{dt} = -\nabla p,$$

где  $\rho_m$  — плотность массы. Скорость  $v$  соответствует скорости нарастания амплитуды  $r d\varepsilon/dt$ . Для возмущения с длиной волны  $\lambda = \lambda/2\pi$  операции векторного дифференцирования соответствует умножение на  $1/\lambda$ . Учитывая выражение (11.2), получим

$$\lambda = \frac{r}{n}.$$

Уравнение движения, таким образом, приобретает вид

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = \frac{\rho_0}{\rho_m} \frac{n}{r^2} \left( \frac{\pi r_m}{L} \right)^2 \varepsilon. \quad (11.11)$$

В этом уравнении  $r$  все еще есть функция  $z$ , однако для наших целей достаточно положить  $r = r_m$ . Полученное уравнение имеет решения вида  $\varepsilon \sim \exp(\pm t/\tau)$ , где постоянная времени  $\tau$  определяется следующим соотношением:

$$\tau = \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{\rho_m}{n\rho_0}}. \quad (11.12)$$

Чтобы получить общее решение, соответствующее начальному возмущению, вообще говоря, необходимы оба решения, однако через непродолжительное время только член с положительной степенью окажется существенным. Это объясняет, почему, несмотря на присутствие как затухающих, так и нарастающих членов, решение в целом неустойчиво.

Скорость звука в плазме, а также средняя тепловая скорость ионов по порядку равны  $\sqrt{\rho_0/\rho_m}$ . Таким образом, постоянная времени, если не учитывать  $\pi$  и  $n$ , по существу равна времени прохождения звуком (или ионом) расстояния  $L$ . Это время значительно меньше продолжительности термоядерной реакции в установках разумных размеров (длиной не более нескольких метров). Поэтому надежды на осуществление управляемой термоядерной реакции связаны с поисками устойчивой конфигурации системы из плазмы и магнитного поля.

Причина неустойчивости конфигурации, изображенной на рис. 11.1, связана с тем, что большая часть ее поверхности выпуклая. Именно из-за выпуклости поверхности магнитное поле возрастает в углублениях и уменьшается на гребнях возмущения. Для магнитного поля с равным нулю ротором и изогнутыми силовыми линиями напряженность поля уменьшается при удалении от центра кривизны поля. Равенство нулю ротора поля обуславливает равенство нулю контурного интеграла от  $\mathbf{V}$ , взятого по бесконечно малому контуру, например такому, как контур  $C$  на рис. 11.3. Две стороны этого контура перпендикулярны силовым линиям и две расположены вдоль силовых линий. Поскольку длина дуги двух последних сторон пропорциональна их расстоянию от центра кривизны, напряженность поля обратно пропорциональна этому расстоянию. Для более точного доказательства этой теоремы представим вектор поля  $\mathbf{V}$  в виде  $B\mathbf{V}_0$ , где  $B$  — абсолютная величина, а  $\mathbf{V}_0$  — единичный вектор, направленный параллельно полю  $\mathbf{V}$ . Тогда

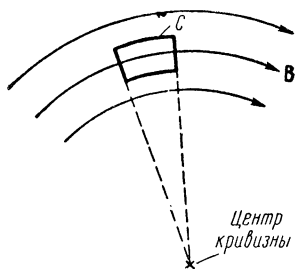


Рис. 11.3. Контур интегрирования.

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = \operatorname{rot} B\mathbf{V}_0 = B \operatorname{rot} \mathbf{V}_0 - [\mathbf{V}_0 \cdot \nabla B] = 0,$$



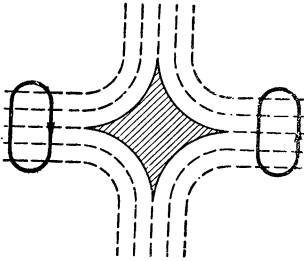
поэтому

$$[\mathbf{B}_0 \nabla B] = \dot{B} \operatorname{rot} \mathbf{B}_0.$$

Умножим левую часть этого уравнения векторно на  $\mathbf{B}_0$ . В результате этого его левая часть будет равна перпендикулярной  $\mathbf{B}$  компоненте  $\nabla B$  (взятой со знаком минус), которую обозначим  $\nabla_{\perp} B$ . Далее,

$$\begin{aligned} -\nabla_{\perp} B &= B [\mathbf{B}_0 \operatorname{rot} \mathbf{B}_0] = B \left[ \nabla \frac{B_0^2}{2} - (\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{B}_0 \right] = \\ &= -B (\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{B}_0. \end{aligned} \quad (11.13)$$

Как было показано в гл. 2, произведение  $(\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{B}_0$  — вектор, направленный в сторону центра кривизны и по абсолютной величине обратно пропорциональный радиусу кривизны. Если  $s$  — расстояние, измеряемое вдоль силовой линии от центра кривизны, а  $R(s)$  — местное значение радиуса кривизны, то можно написать



$$\frac{\partial B}{\partial s} = -\frac{B}{R(s)}. \quad (11.14)$$

Рис. 11.4. Ловушка со встречными полями, обладающими отрицательной кривизной.

Производная от  $B$  обращается в нуль для направлений, перпендикулярных  $\mathbf{B}$  и радиусу кривизны. Такова точная математическая формулировка теоремы.

Таким образом, если центр кривизны расположен на стороне поверхности, обращенной к плазме, напряженность  $\mathbf{B}$  и магнитное давление будут меньше на гребнях, чем в углублениях. Если же центр кривизны находится на внешней по отношению к плазме стороне поверхности, эта связь заменяется противоположной, и желобковые возмущения оказываются устойчивыми. Несмотря на то что конфигурация, изображенная на рис. 11.1, обладает как выпуклыми, так и вогнутыми участками, результат вычислений показывает, что она неустойчива к возмущениям типа (11.2). Еще менее устойчива конфигурация по отношению к возмущениям, имеющим относительно меньшую амплитуду в вогнутых участках поверхности,

Если изменить направление тока в одной из обмоток, изображенных на рис. 11.1, то можно получить конфигурацию, подобную изображенной на рис. 11.4. Поскольку в этой конфигурации центр кривизны всегда располагается со стороны магнитного поля, возмущения желобкового типа не смогут экспоненциально нарастать, а будут в лучшем случае осциллировать.

Заметим, что, согласно уравнению (11.12), время нарастания возмущения уменьшается с ростом  $n$ . Этот результат общий для многих задач на устойчивость. Конечно, при достаточно больших  $n$ , таких, что длина волны становится сравнимой с толщиной переходного слоя, наша модель становится несправедливой.

Мы рассмотрели только такие возмущения, у которых желобки параллельны силовым линиям поля. Совершенно ясно, что именно эти возмущения наименее устойчивы. Когда желобки перпендикулярны силовым линиям, как, например, на рис. 11.5, силовые линии оказываются сжатыми в районе гребней и разреженными в углублениях. В этом случае разность давлений действует в направлении, соответствующем подавлению возмущений.

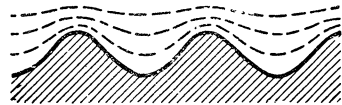


Рис. 11.5. Желобковые возмущения в перпендикулярном поле направления.

### § 11.3. Неустойчивость плазмы низкого давления

В предыдущем параграфе было показано, что для полностью диамагнитной плазмы области, где поверхность плазмы выпуклая, неустойчивы. В этом параграфе докажем, что аналогично ведет себя и плазма, давление которой мало по сравнению с магнитным давлением.

Прежде чем рассмотреть границу произвольной формы, исследуем неустойчивости, возникающие при плоской границе за счет действия нормально направленного к ней гравитационного поля. На рис. 11.6, *a* область сверху соответствует плазме и магнитному полю, область внизу — одному магнитному полю. Магнитное поле везде перпендикулярно плоскости чертежа и направлено к читателю. Предположим для простоты, что давление плазмы намного

меньше давления магнитного поля и величина магнитного поля в состоянии равновесия примерно одинакова как вне плазмы, так и внутри нее. Ускорение силы тяжести  $g$  будем считать направленным вниз. Предположим также, что в начальный момент возмущение поверхности плазмы имеет синусоидальный характер.

Механизм нарастания возмущения поясняется на рис. 11.6, б. Направленная перпендикулярно  $\mathbf{B}$  гравитационная сила заставляет ионы дрейфовать налево, а элект-

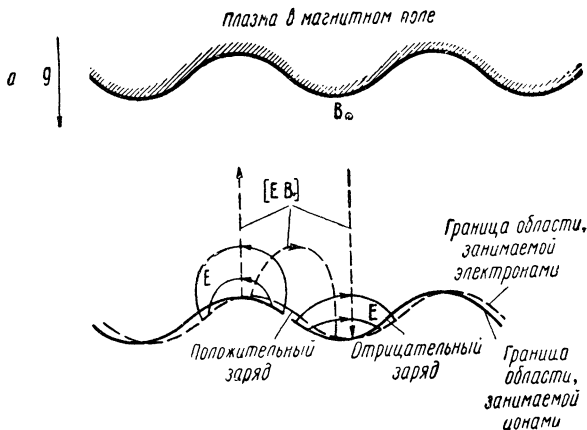


Рис. 11.6. Механизм гравитационной неустойчивости:

$a$  — начальное возмущение;  $b$  — развитие неустойчивости.

троны — направо. Возникающее в результате дрейфа на склонах синусоиды разделение зарядов приводит к образованию электрического поля, частично компенсируемого диэлектрическими свойствами плазмы. Это поле совместно с перпендикулярным ему  $\mathbf{B}$  заставляет плазму перемещаться в наиболее низко расположенные (на нашем чертеже) точки, увеличивая таким образом амплитуду возмущения. Простой расчет\*, аналогичный проделанному в § 4.2, показывает, что амплитуда возмущения нарастает экспоненциально, как  $\exp(\pm \sqrt{g/\lambda t})$ , где  $\lambda$  — длина волны, деленная на  $2\pi$ . Таким образом, рассмотренная

\* M. N. Rosenbluth, C. L. Longmire. Ann. Phys. (N. Y.), 1, 120 (1957).

конфигурация неустойчива. Если же  $g$  направлено в обратную сторону, то возмущение только осциллирует с частотой  $\sqrt{g/\lambda}$ .

Полученные выводы в точности соответствуют гидродинамической задаче об устойчивости жидкости, находящейся в поле тяжести и покоящейся на невесомом газе. Этот факт — еще одна иллюстрация закона применимости уравнений гидродинамики к плазме в случае прямых силовых линий  $\mathbf{B}$  и постоянства других характеристик вдоль направления силовых линий. Естественно, что ларморовский радиус при этом должен быть мал по сравнению с длиной волны возмущения  $\lambda$ .

Посмотрим теперь, нельзя ли заменить влияние тяготения искривлением линий магнитного поля. Предположим, что на рис. 11.6 магнитные силовые линии, выходящие из плоскости чертежа, изогнуты кверху. Тогда центр кривизны будет расположен внутри объема плазмы и можно предположить, что конфигурация станет неустойчивой. Так и происходит на самом деле. Первопричиной неустойчивости в задаче с тяготением был гравитационный дрейф, заставлявший положительные и отрицательные частицы двигаться в противоположных направлениях, приводя к разделению зарядов. В последнем случае имеются два типа дрейфа, способствующие разделению зарядов.

Одним из них является дрейф, обусловленный кривизной силовых линий, рассмотренный в § 2.9, пункт Б. Как было показано, этот дрейф связан с наличием центробежной силы  $mv_{\parallel}^2/R$ , возникающей при движении частиц вдоль изогнутых силовых линий  $\mathbf{B}$  ( $R$  — радиус кривизны линий). В настоящей задаче эта сила действует вниз, и гравитационное ускорение можно заменить следующим образом:

$$g \rightarrow \frac{v_{\parallel}^2}{R}. \quad (11.15)$$

Вторым типом дрейфа является дрейф, вызванный наличием градиента поля (см. § 2.9, пункт В), которому соответствует сила

$$-\mu \nabla_{\perp} B = -\frac{1}{2} \cdot \frac{mv_{\perp}^2}{B} \nabla_{\perp} B.$$

В соответствии с результатами § 11.2 [уравнение (11.14)] искривление силовых линий приводит к появлению градиента, величина которого дается выражением

$$\frac{1}{B} \cdot \nabla_{\perp} B = \frac{1}{R}.$$

Для рассматриваемого случая этот градиент направлен вверх, а соответствующая ему сила — вниз. Следовательно, гравитационное ускорение можно заменить так

$$g \rightarrow \frac{1}{2} \frac{v_{\perp}^2}{R}. \quad (11.16)$$

Таким образом, вызванные как кривизной, так и градиентом дрейфы приводят к неустойчивости рассматриваемой конфигурации, нарастающей по закону  $\exp(\pm \alpha t)$ , где

$$\alpha = \sqrt{\frac{v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2}{R \lambda}}. \quad (11.17)$$

Учитывая влияние распределения скоростей и различие масс электронов и ионов, необходимо заменить равенство (11.17) таким:

$$\alpha = \sqrt{\frac{p_{\parallel} + p_{\perp}}{\rho_m R \lambda}}, \quad (11.17')$$

где  $p_{\parallel}$  и  $p_{\perp}$  — компоненты давления плазмы.

Если центр кривизны линий лежит вне объема плазмы, то возмущения имеют периодический характер с частотой  $\alpha$ .

Полученные результаты могут найти применение в следующей задаче. Предположим, что магнитное поле образуется при протекании тока в длинном прямолинейном проводнике. Поместим плазму в цилиндрическую камеру, ось которой совпадает с проводником. Тогда внутренняя поверхность плазмы ведет себя устойчиво, в то время, как внешняя — неустойчиво. На внешней поверхности развивается желобковая неустойчивость, отмеченная пунктиром на рис. 11.7, углубления и гребни которой располагаются концентрично относительно оси конфигурации. Такой тип неустойчивости, называемый перетяжками, является основным препятствием при исследовании прямо-

линейных разрядов, не имеющих компоненты магнитного поля  $B_z$  вдоль оси разряда.

В рассмотренном примере давление и плотность плазмы резко падают до нуля на некотором расстоянии, и неустойчивость развивается на самой границе. Легко видеть, однако, что если в объеме плазмы существует неоднородность плотности, то неустойчивость может охва-

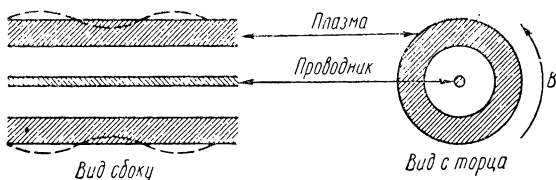


Рис. 11.7. Неустойчивость типа перетяжек.

тять и объем. Когда давление не сильно меняется на длине волны возмущения, компоненты давления в выражении (11.17') следует заменить согласно

$$(p_{\parallel} + p_{\perp})_1 \rightarrow \lambda \nabla (p_{\parallel} + p_{\perp}). \quad (11.18)$$

В последней модели учитывалась только электростатическая часть электрического поля, обусловленная разделением зарядов. Однако при движении плазмы и смещении токов в результате изменения магнитного поля возникает дополнительное электрическое поле. Можно показать, что отношение индуцированного поля к электростатическому имеет порядок отношения давления плазмы к магнитному давлению. Поэтому, в то время как для плазмы низкого давления индуцированным полем можно пренебречь, для больших давлений оно становится существенным.

До сих пор в этом параграфе изучалась конфигурация, параметры которой не менялись вдоль направления силовых линий  $\mathbf{B}$ . Однако, например, в ловушке с магнитными зеркалами радиус кривизны линии меняется и даже меняет знак вдоль траекторий некоторых частиц. Для таких случаев необходимо проводить усреднение скорости дрейфа вдоль всей траектории частицы.

Возвратимся к конфигурации с магнитными зеркалами, изображенной на рис. 11.1, и предположим теперь, что

давление плазмы мало везде по сравнению с магнитным давлением. Введем цилиндрические координаты  $r$ ,  $\theta$  и  $z$ , причем ось  $z$  пусть будет направлена по оси симметрии системы. Дрейфы, обусловленные кривизной линий и наличием градиента  $B$ , будут влиять на угловую скорость дрейфа  $\dot{\theta}_D$ , которая будет меняться при движении частицы вдоль силовой линии. Каждая частица будет двигаться по часовой стрелке или в обратном направлении в зависимости от знака интеграла  $\int \dot{\theta}_D dt$  при одном обороте вокруг оси. От величины средней скорости углового дрейфа каждой частицы зависит, будет ли она способствовать или, наоборот, мешать устойчивости всей конфигурации. Пусть  $dl$  — элемент длины силовой линии  $B$ , а  $v_{\parallel}$  — продольная скорость. Тогда

$$\int \dot{\theta}_D dt = \int \dot{\theta}_D \frac{dl}{v_{\parallel}}, \quad (11.19)$$

где интегралы должны браться между точками поворота траектории частицы. Будем считать радиус кривизны положительным, если центр кривизны расположен по ту же сторону, что и центральная ось конфигурации, и отрицательным — в противоположном случае. Тогда мгновенное значение угловой скорости дрейфа будет равно

$$\dot{\theta}_D = \frac{1}{r} \frac{mc}{eB} \frac{v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2}{R}, \quad (11.20)$$

где  $r$  — мгновенное значение радиальной координаты. Для положительно заряженных частиц положительным значениям  $\dot{\theta}_D$  будет соответствовать неустойчивость. Поэтому частица будет двигаться неустойчиво в том случае, когда

$$I = \frac{e}{c \sqrt{2m}} \int \dot{\theta}_D dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{1}{rRB} \frac{v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2}{v_{\parallel}} dl > 0. \quad (11.21)$$

Используя слагающие энергии  $\omega_{\parallel}$  и  $\omega_{\perp}$  (полная энергия равна  $\omega$ ), связанные соотношением

$$\omega = \omega_{\parallel} + \omega_{\perp} = \text{const},$$

и магнитный момент

$$\mu = \frac{\omega_{\perp}}{B} = \text{const},$$

можно выразить условие неустойчивости (11.21) так:

$$I = \int \frac{1}{rRB} \frac{\omega - \frac{1}{2} \mu B}{\sqrt{\omega - \mu B}} dl > 0. \quad (11.22)$$

Естественно, интеграл  $I$  больше нуля (что соответствует неустойчивости), когда параметры  $\omega$  и  $\mu$  таковы, что траектория частицы ограничена центральной областью ловушки с магнитными зеркалами, где кривизна  $1/R$  положительна. С другой стороны, если траектория проникает глубоко в область обмоток, где кривизна отрицательна, интеграл становится отрицательным, что соответствует устойчивости. В последнем случае приведенное условие особенно хорошо соблюдается в точках поворота, где

$$\sqrt{\omega - \mu B} = 0.$$

Обыкновенно мы имеем дело с каким-либо распределением частиц  $j(\omega, \mu)$ , обладающих набором значений  $\omega$  и  $\mu$  и движущихся вдоль одной и той же силовой линии или вдоль поверхности вращения этой линии. В том случае, когда граница плазмы совпадает с поверхностью, она не будет устойчивой при условии

$$\int I(\omega, \mu) f(\omega, \mu) d\omega d\mu > 0. \quad (11.23)$$

Ясно, что конфигурация плазмы низкого давления в системе с магнитными зеркалами может быть как устойчивой, так и неустойчивой в зависимости от того, какая часть траекторий частиц проникает далеко в область отрицательной кривизны\*.

#### § 11.4. Энергетический метод исследования устойчивости

В равновесной плазме силы, вызываемые магнитным и кинетическим давлениями, должны компенсироваться. Следовательно, потенциальная энергия равновесной системы по отношению к другим возможным конфигурациям должна быть минимальной (или максимальной). Если при всех возможных деформациях системы потенциальная энергия возрастает, то такая система устойчива, поскольку

\* См. сноску на стр. 290.



кинетическая энергия не может быть отрицательной. Если при некоторых деформациях потенциальная энергия уменьшается, то по отношению к этим деформациям система неустойчива.

Высказанные положения звучат вполне правдоподобно. Посмотрим, в какой степени они соответствуют действительности. Во-первых, нужно иметь возможность разделить полную энергию системы на две части: эффективную кинетическую энергию  $T_e$  и эффективную потенциальную  $V_e$ . Энергия  $T_e$  в состоянии равновесия обращается в нуль, а при отклонениях от равновесия положительна. Энергия  $V_e$  зависит только от степени отклонения от равновесия, но не от скорости отклонения. При соблюдении указанных условий высказанные в начале параграфа признаки справедливы.

Полная энергия системы частиц и полей представляет собой сумму кинетических энергий отдельных частиц и энергии поля. Энергия поля, очевидно, составляет часть потенциальной энергии системы, так как она зависит только от конфигурации системы, а отнюдь не от скорости ее изменения. Однако эффективная кинетическая энергия не может быть просто суммой кинетических энергий отдельных частиц, поскольку последние обращаются в нуль при равновесии. По-видимому, необходимо разделить кинетическую энергию частиц на две части: макроскопическую, зависящую от средней скорости и обращающуюся в нуль при равновесии, и внутреннюю энергию, которая определяется через среднюю величину отклонения с помощью, например, адиабатического закона. Тогда внутренняя энергия может войти в выражение для эффективной потенциальной энергии. Более того, нам необходимо располагать законом, связывающим изменения полей со средними отклонениями конфигурации плазмы.

Очевидно, чтобы иметь возможность применить энергетический принцип, мы должны описывать плазму макроскопически. Как было показано в гл. 1—4, не существует, вообще говоря, системы уравнений сплошной среды, которая могла бы точно описывать поведение плазмы. Причина этого в том, что частицы могут свободно перемещаться вдоль силовых линий магнитного поля. Единственным исключением из этого правила являются конфигурации, в которых свойства не меняются вдоль направления силовых линий.

Тем не менее весьма поучительно рассмотреть вопросы устойчивости в гидродинамическом приближении. Для тех случаев, когда свойства системы не сильно изменяются вдоль направления силовых линий, можно ожидать близких к действительности результатов. Кроме того, для таких сред, как, например, жидкие металлы, где частота столкновений высока и в то же время электропроводность достаточно велика, гидродинамическое приближение может дать вполне удовлетворительные результаты.

Запишем уравнения магнитной гидродинамики\*:

$$\rho_m \frac{dv}{dt} = -\nabla p + [\mathbf{j}\mathbf{B}]; \quad (11.24)$$

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla(\rho_m \mathbf{v}) = \frac{d\rho_m}{dt} + \rho_m \nabla \mathbf{v} = 0; \quad (11.25)$$

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] = 0; \quad (11.26)$$

$$\frac{d}{dt} (p\rho_m^{-\gamma}) = 0; \quad (11.27)$$

$$\text{rot } \mathbf{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (11.28)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j}; \quad (11.29)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (11.30)$$

Уравнение (11.24) является приближенной формой уравнения Ньютона, где  $\rho_m$  — плотность массы;  $\mathbf{v}$  — средняя макроскопическая скорость среды. Плазма предполагается электрически нейтральной, а тензор кинетического давления считаем скаляром. Производная по времени в этом уравнении означает дифференцирование вдоль траектории элемента объема, т. е. является так называемой субстанциональной производной

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla. \quad (11.31)$$

Уравнения (11.25) соответствуют двум формам уравнения непрерывности.

Уравнение (11.26) имеет несколько следствий. Во-первых, из него следует, что у поля  $\mathbf{E}$  нет компоненты, параллельной  $\mathbf{B}$ . Это полностью справедливо лишь в том

\* J. Bernstein et al. Proc. Roy. Soc., A244, 17 (1958).

случае, когда проводимость вдоль силовых линий  $\mathbf{B}$  бесконечна. Такое допущение действительно можно сделать, если пренебречь инерцией электронов (т. е. пренебречь другими частотами в сравнении с плазменной частотой  $\omega_p$ ) и предположить, что для части электронов величина  $\omega_{\perp}$  столь мала, что они не испытывают отражающего действия магнитных зеркал.

Во-вторых, из того же уравнения следует, что  $\mathbf{v}_{\perp}$  — перпендикулярная  $\mathbf{B}$  компонента  $\mathbf{v}$  — равна скорости электрического дрейфа. Последнее утверждение заведомо справедливо для частот, малых по сравнению с ларморовской частотой ионов.

Уравнение (11.27) представляет уравнение адиабаты, связывающее плотность и давление плазмы. Предположения о справедливости этого уравнения и о том, что давление есть скаляр, являются наиболее уязвимыми пунктами магнитогидродинамического приближения для плазмы без столкновений.

Уравнения (11.28) — (11.30) — уравнения Максвелла, в которых опущен ток смещения. Это предположение вполне допустимо в случаях, когда ионная часть диэлектрической постоянной  $4\pi \frac{NMc^2}{B^2}$  больше единицы.

Самым удобным свойством уравнений (11.24) — (11.30) является наличие для них интеграла полной энергии

$$U = \int dr \left\{ \frac{1}{2} \rho_m v^2 + \frac{1}{8\pi} B^2 + \frac{p}{\gamma - 1} \right\} = \text{const.} \quad (11.32)$$

То, что величина  $U$  — действительно постоянная, может быть показано дифференцированием подинтегрального выражения по времени с учетом системы уравнений (11.24) — (11.30). Выполнив некоторые преобразования, можно записать подинтегральное выражение в (11.32) в виде дивергенции

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} = - \int dr \nabla \cdot \left\{ \frac{\rho_m v^2}{2} \mathbf{v} + \left( 1 + \frac{1}{\gamma - 1} \right) p \mathbf{v} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4\pi} [\mathbf{B} [\mathbf{vB}]] \right\}. \end{aligned} \quad (11.33)$$

Этот интеграл по объему может быть, как известно, преобразован в интеграл по поверхности от нормальной компоненты вектора, стоящего в фигурных скобках и пред-

ставляющего поток различных видов энергии. Первый член в скобках есть поток макроскопической кинетической энергии, второй состоит из двух частей:  $p\mathbf{v}$  — скорости переноса давления через поверхность и  $p\mathbf{v}/(\gamma - 1)$  — потока внутренней энергии. Последний член, согласно уравнению (11.26), равен вектору Пойнтинга, т. е. потоку энергии электромагнитного поля.

В качестве поверхности интегрирования обычно берут либо поверхности сфер бесконечного радиуса, либо жесткие проводящие стенки, на которых нормальная компонента  $\mathbf{v}$  и вектора Пойнтинга обращаются в нуль. В обоих случаях весь поверхностный интеграл равен нулю, так что

$$\frac{dU}{dt} = 0. \quad (11.34)$$

Для того чтобы иметь возможность применить энергетический метод, необходимо вычислить изменения  $\mathbf{V}$  и  $p$ , соответствующие произвольным деформациям конфигурации плазмы. Наиболее легко эти величины вычисляются для малых отклонений от состояния равновесия. Поэтому при интегрировании будем исходить из равновесной конфигурации, описываемой величинами  $\rho_0, p_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{B}_0$ . Скорость  $\mathbf{v}$  и поле  $\mathbf{E}$  для этой конфигурации равны нулю. Соответствующие магнитогидродинамические уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} -\nabla p_0 + [\mathbf{j}_0 \mathbf{B}_0] &= 0; \\ \text{rot } \mathbf{B}_0 &= 4\pi \mathbf{j}_0. \end{aligned} \quad (11.35)$$

Предположим теперь наличие малых отклонений значений  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{E}$  от нуля, а величин  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_1$  — от равновесных, и т. д. Таким образом, величины с индексом 1 имеют первый порядок малости. С точностью до первого порядка по ним уравнение (11.24) может быть написано следующим образом:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p_1 + [\mathbf{j}_0 \mathbf{B}_1] + [\mathbf{j}_1 \mathbf{B}_0].$$

Взяв от него частную производную по времени, получим

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = -\nabla \frac{\partial p_1}{\partial t} + \left[ \dot{\mathbf{j}}_0 \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} \right] + \left[ \frac{\partial \mathbf{j}_1}{\partial t} \mathbf{B}_0 \right]. \quad (11.36)$$

Далее с точностью до первого порядка имеем

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{dp_1}{dt} - (\mathbf{v}\nabla) p_0 = -\gamma p_0 \nabla \mathbf{v} - (\mathbf{v}\nabla) p_0$$

и

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{rot} [\mathbf{v}\mathbf{B}_0] = \mathbf{Q}(\mathbf{v}), \quad (11.37)$$

где введена новая величина  $\mathbf{Q}(\mathbf{v})$ .

Кроме того,

$$\frac{\partial \mathbf{j}_1}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{Q}.$$

Используя эти соотношения, преобразуем уравнение (11.36):

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = \gamma \nabla (p_0 \nabla \mathbf{v}) + \nabla (\mathbf{v}\nabla) p_0 + [\mathbf{j}_0 \mathbf{Q}(\mathbf{v})] - \\ - \frac{1}{4\pi} [\mathbf{B}_0 \operatorname{rot} \mathbf{Q}(\mathbf{v})]. \end{aligned} \quad (11.38)$$

В последнем уравнении скорость  $\mathbf{v}$  есть функция  $\mathbf{r}$  и  $t$ . Введем смещение  $\xi(\mathbf{r}, t)$  следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t).$$

При соответствующем выборе постоянной интегрирования  $\xi$  с точностью до первого порядка равно смещению элемента объема плазмы от своего равновесного положения. Интегрируя уравнение (11.38) по времени, получим

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\mathbf{F}(\xi), \quad (11.39)$$

где оператор  $\mathbf{F}$  имеет вид

$$\begin{aligned} -\mathbf{F}(\xi) = \gamma \nabla (p_0 \nabla \xi) + \nabla ((\xi \cdot \nabla) p_0) + \\ + [\mathbf{j}_0 \mathbf{Q}(\xi)] - \frac{1}{4\pi} [\mathbf{B}_0 \operatorname{rot} \mathbf{Q}(\xi)], \end{aligned} \quad (11.40)$$

а

$$\mathbf{Q}(\xi) = \operatorname{rot} [\xi \mathbf{B}_0]. \quad (11.41)$$

Величина  $\mathbf{F}(\xi)$  — некомпенсированная сила, возникающая в результате смещения элемента объема.

Важным свойством оператора  $F$  является его самосопряженность, т. е. если  $\xi(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  — две вектор-функции  $\mathbf{r}$ , то

$$\int \mathbf{n}F\{\xi\} d\mathbf{r} = \int \xi F\{\mathbf{n}\} d\mathbf{r}. \quad (11.42)$$

Область интегрирования в последнем выражении либо распространяется на все пространство, либо ограничивается жесткими проводящими стенками. Указанное свойство оператора может быть выведено непосредственно из выражения (11.40) и уравнения (11.35). Однако этот вывод довольно громоздок. Бернштейном и др.\* было доказано, что самосопряженность  $F\{\xi\}$  следует непосредственно из наличия у системы магнитогидродинамических уравнений интеграла энергии (11.32).

Поскольку уравнение (11.39) линейно по  $\xi$ , можно искать его решения в виде

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \xi(\mathbf{r}) e^{i\omega t}. \quad (11.43)$$

Подставляя (11.43) в (11.39), получим

$$F\{\xi\} = \omega^2 \rho_0 \xi. \quad (11.44)$$

Решение уравнения (11.44) сводится к решению краевой задачи, заключающейся в нахождении таких решений  $\xi_n(\mathbf{r})$ , которые удовлетворяют краевым условиям (обращение нормальных компонент  $\xi$  в нуль на стенках) лишь для вполне определенных значений  $\omega^2 = \omega_n^2$ , называемых собственными значениями. Частоты  $\pm\sqrt{\omega_n^2}$  соответствуют собственным колебаниям конфигурации. Поскольку оператор  $F$  самосопряженный, все значения  $\omega_n^2$  действительны, и, следовательно,  $\omega_n$  — либо чисто действительные, либо чисто мнимые величины. Если хотя бы одна из величин  $\omega_n^2$  отрицательна, то соответствующее значение  $\omega_n$  мнимо, и конфигурация будет неустойчивой.

Таким образом, один из способов изучения устойчивости связан с нахождением собственных значений  $\omega_n^2$ . Обычно это крайне трудная задача. Поэтому попытаемся исполь-

---

\* См. сноску на стр. 297.

зовать принцип минимума энергии. Определим кинетическую энергию конфигурации следующим образом:

$$T = \int \frac{1}{2} \rho_0 \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 dr. \quad (11.45)$$

С помощью уравнения (11.39) можно вычислить изменение кинетической энергии в единицу времени

$$\frac{dT}{dt} = \int \rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} dr = - \int \frac{\partial \xi}{\partial t} F \{ \xi \} dr. \quad (11.46)$$

Из самосопряженности оператора  $F$  следует, что

$$\int \frac{\partial \xi}{\partial t} F \{ \xi \} dr = \int \xi \cdot F \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial t} \right\} dr = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \int \xi \cdot F \{ \xi \} dr \right).$$

Поэтому уравнение (11.46) может быть записано в виде

$$\frac{d}{dt} (T + V) = 0, \quad (11.47)$$

где  $V$  — потенциальная энергия, равная

$$V = \frac{1}{2} \int \xi F \{ \xi \} dr. \quad (11.48)$$

Полная энергия тогда равна  $T + V$  и постоянна.

Если все собственные значения  $\omega_n^2$  положительны (система устойчива), то величина  $V$  будет положительна при любых смещениях от положения равновесия. Если же некоторые из  $\omega_n^2$  отрицательны (система неустойчива), то для некоторых смещений величина  $V$  может стать отрицательной. Чтобы убедиться в этом, разложим  $\xi$  по собственным функциям уравнения (11.44):

$$\xi(r) = \sum_n a_n \xi_n(r) \quad (11.49)$$

и подставим его в уравнение (11.48). Ввиду ортогональности собственных функций

$$\int \rho_0 (\xi_n \cdot \xi_m) dr = \delta_{nm}, \quad (11.50)$$

выражение для  $V$  принимает вид

$$V = \sum \frac{1}{2} a_n^2 \omega_n^2. \quad (11.51)$$

Так как все  $a_n$  действительны, то для положительных значений  $\omega_n^2$   $V$  также положительно. Однако если часть  $\omega_n^2$  меньше нуля, то  $V$  может также стать отрицательным. Ясно, что если для каких-либо  $\xi$   $V$  отрицательно, то по крайней мере одна из величин  $\omega_n^2$  также отрицательна. Следовательно, достаточное условие неустойчивости заключается в нахождении таких смещений, для которых  $V$  отрицательно. Устойчивость же может быть доказана только в том случае, если  $V$  положительно для любых возможных смещений.

Приведенный принцип очень широко используется при исследовании устойчивости плазмы\*.

### § 11.5. Устойчивость пинча

Как было показано в § 11.3, простой пинч, обладающий только аксиальным полем  $B_0$ , неустойчив по отношению к перетяжкам. Если описывать возмущение поверхности плазмы следующим образом:

$$\delta r = ae^{i(kz+m\theta)}, \quad (11.52)$$

то перетяжкам, очевидно, соответствует случай  $m = 0$ . Однако простой пинч неустойчив также и при других значениях  $m$ . При  $m = 1$  плазменный цилиндр стремится принять форму спирали, или штопора. Подобный тип неустойчивости называется винтовой неустойчивостью. Главная причина этого вида неустойчивости может быть понята с помощью рис. 11.8. Когда плазменный цилиндр изгибается, магнитное поле становится сильнее на его стороне, обращенной к центру кривизны. Это более сильное, чем с другой стороны, поле стремится еще больше изогнуть цилиндр плазмы, что и приводит к неустойчивости.

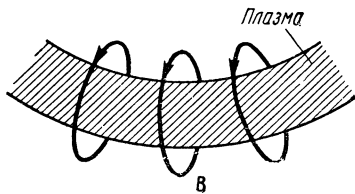


Рис. 11.8. Винтовая неустойчивость.

Такие крупномасштабные неустойчивости пинча могут быть подавлены созданием продольного магнитного поля  $B_z$

\* См. сноску на стр. 297.



внутри плазмы. В этом случае смещения поверхности плазмы, соответствующие  $m = 0$  или  $m = 1$ , стремятся растянуть линии  $B_z$ , что при достаточно больших значениях  $B_z$  приводит к стабилизации пинча\*.

Однако введение поля  $B_z$  не избавляет пинч от всех неустойчивостей. Дело в том, что переход от поля  $B_z$  внутри плазмы к полю  $B_0$  вне ее происходит не резко, а занимает некоторую область, где поле постепенно искривляется. Например, для квазистатического пинча, рассмотренного в § 10.9, переходная область занимает весь объем плазмы от оси до поверхности. Линии поля  $\mathbf{B}$  в этой так называемой области шира образуют спирали. Возмущение, возникающее в окрестности некоторой спиральной силовой линии с такими  $m$  и  $k$ , что шаг возмущения равен шагу данной силовой линии, будут также неустойчивыми, как это было показано независимо Ньюкомбом\*\*, Розенблатом\*\*\* и Сайдамом\*\*\*\*.

Квазистатический пинч, рассмотренный в § 10.9, имеет именно этот вид неустойчивости. Ньюкомбом и Сайдамом было показано, что такая неустойчивость может быть подавлена введением наряду с полем  $B_z$  внутри плазмы противоположно направленного поля вне ее.

## § 11.6. Уточнение теории устойчивости

Мы предполагали в § 11.4, что давление плазмы является скаляром и подчиняется закону адиабаты  $p_z \sim \rho_m^{\gamma}$ . Можно распространить энергетический метод и на тот случай, когда давление — диагональный тензор, причем  $p_{\parallel}$  не обязательно равно  $p_{\perp}$ \*\*\*\*\*. Каждая из компонент давления теперь подчиняется своему собственному закону адиабаты. Для сжатий в поперечном к линиям  $\mathbf{B}$  направ-

---

\* Р. И. Таулер. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958». Избранные доклады иностранных ученых. Т. 8. М., Атомиздат, 1959, стр.

\*\* W. Newcomb. Ann. Phys. (N. Y.), 10, 232 (1960).

\*\*\* М. Н. Розенблат. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958». Избранные доклады иностранных ученых. Т. 1. М., Атомиздат, 1959, стр. 55.

\*\*\*\* Б. Сайдам. Там же, стр. 89.

\*\*\*\*\* См. сноску на стр. 297.

лении известно, что  $\omega_{\perp} \sim B$ , а  $N \sim B$ , в то время как  $\omega_{\parallel}$  не меняется. Поэтому

$$\left. \begin{aligned} \rho_{\perp} &= N\omega_{\perp} \sim \rho_m^2; \\ \rho_{\parallel} &= 2N\omega_{\parallel} \sim \rho_m \end{aligned} \right\} \text{(поперечное сжатие)}. \quad (11.53)$$

При сжатии вдоль линий  $\mathbf{B}$   $\omega_{\perp}$  не меняется, тогда как  $\rho_{\parallel} \sim \rho_m^3$ , поскольку для одномерного газа  $\gamma = 3$ . Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} \rho_{\perp} &\sim \rho_m; \\ \rho_{\parallel} &\sim \rho_m^3 \end{aligned} \right\} \text{(продольное сжатие)}. \quad (11.54)$$

Применение энергетического метода для такой анизотропной плазмы значительно сложнее, чем для изотропной плазмы со скалярным давлением. Кроме того, этот метод также неточен. Последнее связано с гидродинамическим подходом, при котором считается, что частицы, находившиеся первоначально в элементе объема, который начинает двигаться и испытывать сжатие, продолжают оставаться в нем, и только величины  $\omega_{\parallel}$  и  $\omega_{\perp}$  меняются при сжатии. В действительности частицы могут легко двигаться вдоль силовых линий, унося с собой энергию. При этом существует как бы очень быстрый перенос «тепла» вдоль силовых линий, который в рамках гидродинамического подхода никак не учитывается.

Некоторое улучшение энергетического метода в этом пункте было достигнуто в результате работ Крускала и Обермана\*, а также Розенבלата и Ростокера\*\*, использовавших уравнение Лиувилля. Метод Розенבלата и Ростокера кратко сводится к вычислению реакции каждой частицы, движущейся по своей начальной траектории на вводимые возмущения поля, затем к вычислению результирующих возмущений плотности и тока и подстановке их в уравнения Максвелла для определения возмущений поля. Этот метод подобен использованному в § 6.2 с той разницей, что там невозмущенные начальные траектории

\* М. Крускал и К. Оберман. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958». Избранные доклады иностранных ученых. Т. 1. М., Атомиздат, стр. 42.

\*\* М. Розенבלат и Н. Ростокер. Там же, стр. 52.

считались прямыми. Крускалу и Оберману, как и Розенблату и Ростокеру, удалось показать, что в том случае, когда давление в невозмущенной плазме скаляр, потенциальная энергия возмущения больше энергии, получаемой по магнитогидродинамическому методу в предположении, что давление — скаляр, и меньше, чем следует из магнитогидродинамического метода, в котором давление считается диагональным тензором.

Упомянутые расчеты крайне трудно использовать для практических целей. Кроме того, в них предполагается, что ларморовский радиус весьма мал в сравнении с размерами конфигурации, а частоты возмущения малы по сравнению с ларморовскими.

Исследование влияния конечности ларморовского радиуса на устойчивость конфигурации с магнитными зеркалами было проведено Розенблатом, Ростокером и Кралем\*.

### § 11.7. Пучковая неустойчивость

По существу все рассмотренные до сих пор в этой главе типы неустойчивости можно считать связанными с неоднородным распределением плазмы в обычном пространстве. Однако даже при равномерном распределении плотности плазмы может возникать неустойчивость, обусловленная неоднородностью функции распределения в пространстве скоростей.

С одним из примеров подобной неустойчивости мы уже встречались в § 6.5 (случай 2), когда

$$\rho_{\parallel} > \rho_{\perp} + \frac{B^2}{4\pi}. \quad (11.55)$$

Механизм возникновения этого типа неустойчивости был рассмотрен в том же параграфе.

В качестве второго примера неустойчивости, связанной с характером распределения в пространстве скоростей, рассмотрим так называемую пучковую неустойчивость. Пусть плотность ионов постоянна в пространстве и равна  $N_0$ . Пусть также заданы два пучка электронов каждый плотностью  $N_0/2$ , движущиеся вдоль оси  $x$  со скоростями

\* M. Rosenbluth et al. Suppl. Nucl. Fision., 1962, p. 143.

+  $v_0$  и  $-v_0$ . Предположим, что продольное электрическое поле имеет вид

$$E_x = E e^{i(kx - \omega t)}. \quad (11.56)$$

Используя метод § 6.2, можно найти, что это поле приводит к образованию малых отклонений скорости электронов от начальной скорости, имеющих вид

$$v_1 = \frac{ie}{m(\omega - kv_0)} E_x(x, t).$$

Малые отклонения плотности  $N_1$  электронов можно найти, линеаризовав уравнение непрерывности

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} + v_0 \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{N_0}{2} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0,$$

из которого получим

$$-i(\omega - kv_0) N_1 + ik \frac{N_0}{2} v_1 = 0.$$

Малое отклонение плотности заряда  $\rho_1$  для электронов равно

$$\rho_1 = N_1 e = \frac{N_0 e^2}{2m} \cdot \frac{ik}{(\omega - kv_0)^2} E_x(x, t).$$

Для электронов, обладающих скоростью ( $-v_0$ ), отклонения плотности заряда можно получить, просто заменив  $v_0$  на  $-v_0$ . Подставляя полученное выражение в уравнение Пуассона и пренебрегая движением ионов, найдем

$$ikE_x = 4\pi \frac{N_0 e^2}{2m} \left[ \frac{1}{(\omega - kv_0)^2} + \frac{1}{(\omega + kv_0)^2} \right] ikE_x,$$

что приводит к дисперсионному соотношению

$$1 = \omega_p^2 \frac{\omega^2 + (kv_0)^2}{[\omega^2 - (kv_0)^2]^2}, \quad (11.57)$$

где  $\omega_p$  — плазменная электронная частота. Разрешая последнее уравнение относительно  $\omega^2$ , получим

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left\{ 2(kv_0)^2 + \omega_p^2 \pm \sqrt{8\omega_p^2(kv_0)^2 + \omega_p^4} \right\}. \quad (11.58)$$

Одно из значений для  $\omega^2$  — отрицательно, если корень больше остальных членов. Отрицательным  $\omega^2$ , очевидно, соответствует решение, экспоненциально возрастающее со временем. Таким образом, можно получить условие возникновения пучковой неустойчивости

$$(kv_0)^2 < \omega_p^2. \quad (11.59)$$

В литературе рассмотрено много примеров неустойчивости, вызванной распределением по скоростям, а также приводятся характеристики функций распределения по скоростям, обеспечивающих устойчивость\*. Как и следовало ожидать, распределение Максвелла удовлетворяет этим признакам.

---

\* O. Penrose. Phys. Fluids, 3, 258 (1960).

# Г Л А В А 12

## ПЛАЗМА И ИЗЛУЧЕНИЕ

### § 12.1. Введение

В этой главе мы кратко остановимся на связи между плазмой и электромагнитным излучением. Поскольку плазма представляет газ из заряженных частиц, можно ожидать, что эта связь будет весьма глубокой.

В гл. 4 мы уже встречались с одним из аспектов этой проблемы, когда показали, что плазма в среднем ведет себя как диэлектрическая среда, изменяющая соотношение между частотой и длиной электромагнитной волны по сравнению с вакуумом. Поэтому если поместить плазму в замкнутую полость и разложить электромагнитное поле на волны вида  $\exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r})]$ , используя обычные граничные условия, то можно прийти к выводу, что частота  $\omega(k)$  и энергия квантов излучения  $\hbar\omega(k)$  отличны от своих значений для вакуума. Это отличие имеет наибольшую величину для частот, близких к плазменной или несколько меньших ее. Эти эффекты подробно рассмотрены в настоящей главе.

### § 12.2. Излучение в плазме при тепловом равновесии

Рассмотрим плазму, находящуюся в тепловом равновесии с излучением, в отсутствие магнитного поля. Предположим, что плазма заключена в полость объемом  $V$  с идеально отражающими стенками. Разложим электрическое поле на волны вида  $\mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r})]$ . Рассмотрим сначала поперечные колебания с  $\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{k}$ .

Число колебаний  $\mathfrak{N}(k)$ , приходящихся на интервал  $dk$ , равно

$$\mathfrak{N}(dk) dk = \frac{V}{\pi^2} k^2 dk. \quad (12.1)$$

Это выражение получается путем нахождения числа значений  $k$  в интервале  $dk$ , удовлетворяющих периодическим граничным условиям (после умножения его на 2 для учета обоих направлений поляризации). Выражение (12.1) никак не зависит от наличия или отсутствия плазмы.

Согласно уравнению (6.23), частота волны, соответствующей волновому вектору  $k$ , приближенно равняется\*

$$\omega = (\omega_p^2 + c^2 k^2)^{1/2}. \quad (12.2)$$

В вакууме это соотношение заменяется на  $\omega = ck$ . Таким образом, энергия квантов  $\hbar\omega$  в плазме отличается от случая вакуума.

Суммарная энергия излучения, однако, никак не зависит от разницы частот. Согласно квантовой статистике, средняя энергия колебания с волновым вектором  $k$  равна\*\*

$$\epsilon_k = \frac{\hbar\omega(k)}{e^{-\hbar\omega/\theta} - 1}. \quad (12.3)$$

Если  $\hbar\omega \ll \theta$ , получим

$$\epsilon_k \approx \theta, \quad (12.4)$$

т. е. средняя энергия одного колебания равна  $\theta$  и не зависит от частоты колебания. Далее, когда  $\omega > \omega_p$ , выражение (12.2) стремится к  $\omega = ck$ . Поэтому энергия излучения при равновесии не изменяется, если

$$\hbar\omega_p \ll \theta, \quad (12.5)$$

или (подставляя численные значения) если плотность электронов удовлетворяет неравенству

$$N \ll 10^{21} \theta^2 \text{ (см}^{-3}\text{)}, \quad (12.6)$$

где  $\theta$  в электронвольтах.

Для большинства видов плазмы последнее условие хорошо соблюдается.

\* Поскольку для действительных  $k$   $\omega > \omega_p$ , данное приближение хорошо выполняется, когда тепловая скорость много меньше скорости света.

\*\* В этой главе через  $\theta$  мы будем обозначать температуру в энергетических единицах, чтобы не спутать постоянную Больцмана  $c$  волновым вектором  $k$ .

Если указанное условие выполнено, то полную плотность излучения  $\mathcal{E}_{\text{изл}}$  получают как обычно суммированием величин  $\mathcal{E}_k$  каждого колебания:

$$\mathcal{E}_{\text{изл}} = 137 \theta^4 \text{ (эрг/см}^3\text{)}, \quad (12.7)$$

Давление излучения равно

$$p_{\text{изл}} = \frac{1}{3} \mathcal{E}_{\text{изл}}. \quad (12.8)$$

Излучение черного тела с единицы поверхности равно

$$S_B = \frac{3}{4} \mathcal{E}_{\text{изл}} \left( \frac{\text{эрг} \cdot \text{сек}}{\text{см}^3} \right). \quad (12.9)$$

Рассмотрим теперь продольные волны, для которых  $\mathbf{E}_0 \parallel \mathbf{k}$ . Этим волнам не соответствуют степени свободы, отличные от степеней свободы частиц. Действительно, если разложить плотность заряда, определяющуюся мгновенным положением всех частиц, по плоским волнам, то уравнение Пуассона выглядит так:

$$\Delta (\mathbf{k} \mathbf{E}_0(\mathbf{k})) = 4\pi \rho(\mathbf{k}), \quad (12.10)$$

где  $\rho(\mathbf{k})$  — Фурье-компонента плотности заряда. Поэтому продольное поле определяется положением частиц. В отношении поперечных полей это утверждение несправедливо, так как уравнения Максвелла допускают решения в отсутствие заряда и тока.

Продольное электрическое поле соответствует потенциальной энергии движения частиц. Поэтому в то время как для полностью свободной частицы средняя энергия, приходящаяся на одну степень свободы, равна  $\theta/2$ , в присутствии продольного электрического поля средняя энергия превосходит эту величину. Таким образом, продольные колебания плазмы составляют некоторую часть всех степеней свободы частиц, которую точнее определим ниже. Средняя энергия каждой из степеней свободы оказывается равной  $\theta$  в соответствии с выражением (12.4) при том же условии (12.5).

Доказательство высказанных утверждений может быть проведено следующим образом. Дисперсионное соотношение для продольных волн имеет вид (6.29). Это соотно-



шение справедливо лишь в том случае, когда последний член справа не становится сравнимым с  $\omega_p^2$ , или пока

$$k^2 < \frac{1}{3} \frac{\omega_p^2}{v_k^2} = \frac{1}{3} \frac{4\pi N e^2}{m v_k^2} = \frac{1}{3} \frac{4\pi N e^2}{\theta} = \frac{1}{3} \lambda_D^2, \quad (12.11)$$

т. е. для длин волн, больших дебаевского радиуса. Однако волновая картина описания плазмы справедлива только для длин волн, больших дебаевского радиуса, поскольку, как мы видим в § 6.4, продольные волны с длиной волны, сравнимой или меньшей дебаевского радиуса, затухают быстрее, чем за один период\*. Для более коротких длин волн правильнее считать движение частиц независимым. К этому нужно еще добавить, что, согласно § 8.2, флуктуации плотности частиц в объеме с размерами меньше дебаевского радиуса не испытывают влияния кулоновского потенциала, и, следовательно, частицы можно действительно считать свободными.

Итак, если  $k < 1/\lambda_D$ , из дисперсионного соотношения (6.29) следует, что частота примерно равна  $\omega_p$ . Поэтому, если условие (12.5) удовлетворяется, средняя энергия одного колебания должна равняться  $\theta$  вместо  $\theta/2$ .

Подсчитаем теперь полное число продольных колебаний. Их число, приходящееся на интервал  $dk$ , равно половине правой части уравнения (12.1). Поэтому, интегрируя до значения  $k = 1/\lambda_D$ , найдем полное число продольных колебаний

$$N_l \approx \frac{V}{6\pi^2} \cdot \frac{1}{\lambda_D^3}. \quad (12.12)$$

Поскольку полное число степеней свободы частиц равно  $3NV$ , доля этих степеней свободы  $f_\omega$ , соответствующая продольным волнам, равна

$$f_\omega = \frac{1}{18\pi^2 N \lambda_D^3}. \quad (12.13)$$

Эта доля мала в том случае, когда число частиц в элементе с дебаевскими размерами велико. Она является показате-

---

\* Поперечные волны не подвержены сильному затуханию, так как их фазовая скорость, согласно уравнению (12.2), больше скорости света, и поэтому не может быть частиц, движущихся вместе с ними.

лем того, насколько средняя тепловая энергия, приходящаяся на одну степень свободы, отличается от  $\theta/2$ . В связи с этим выражение (12.13) выглядит более наглядно, если его представить в виде

$$f_{\omega} = \frac{4}{9\sqrt{\pi}} \left( \frac{N^{1/3} e^2}{\theta} \right)^{3/2} \quad (12.14)$$

и иметь в виду, что  $N^{1/3} e^2$  — средняя потенциальная энергия взаимодействия соседних частиц. Величина  $f_{\omega}$  обычно очень мала\*.

Если ввести внешнее магнитное поле, наши результаты несколько усложнятся. Волны уже нельзя разделить на чисто продольные и чисто поперечные, и степени свободы частиц и излучения оказываются перепутанными. Однако для значений  $\omega$ , существенно больших  $\omega_p$ , и электронной ларморовской частоты  $\omega_e$  дисперсионное соотношение приближается к виду, которое оно имеет в вакууме.

При выполнении условий

$$\hbar\omega_p \ll \theta, \quad \hbar\omega_e \ll \theta, \quad N\lambda_D^3 \gg 1 \quad (12.15)$$

энергия излучения и суммарная энергия частиц не могут сильно измениться. Если выразить условие  $\hbar\omega_e \ll \theta$  численно, оно имеет вид

$$B(zc) \ll 10^8 \theta \text{ (эв)}. \quad (12.16)$$

Это условие обычно выполняется.

### § 12.3. Неравновесный случай

Часто приходится иметь дело с плазмой, для которой энергия излучения много меньше, чем в случае равновесия излучения и плазмы. В частности, в устройстве для управляемого термоядерного синтеза нельзя допустить, чтобы энергия передавалась полю излучения в соответствии с условиями равновесия. Плотность энергии частиц плазмы равна

$$\mathcal{E}_{\text{част}} = 2,4 \cdot 10^{-12} N\theta \text{ (эрг/см}^3\text{)}. \quad (12.17)$$

\* См., например, объяснения к рис. 8.1.

Сравнивая это выражение с соотношением (12.7), видно, что для плотности  $N = 10^{17}$  и  $\theta = 10^4$  эв

$$\mathcal{E}_{\text{част}} = 2,4 \cdot 10^9 \text{ эрг/см}^3,$$

$$\mathcal{E}_{\text{изл}} = 1,37 \cdot 10^{18} \text{ эрг/см}^3$$

энергия излучения в  $1 \text{ см}^3$  для данного случая оказывается эквивалентной энергии  $30 \text{ т}$  тринитротолуола, а радиационное давление —  $10^{12} \text{ атм}$ !

В небольших системах излучение может покидать объем быстрее, чем оно генерируется заряженными частицами, и способствовать непрерывной потере энергии плазмой. В следующих параграфах мы рассмотрим основные механизмы излучения частиц.

Известно, что заряженные частицы излучают при ускоренном движении. Следовательно, наша задача сводится к выяснению различных механизмов ускорения и торможения частиц.

Необходимо постоянно помнить, что заряд излучает тогда и только тогда, когда он испытывает ускорение. Рассмотрим, например, плазму, помещенную в полость с идеально отражающими стенками. Если потенциал взаимодействия соседних частиц значительно меньше температуры, то можно предположить, что частицы движутся по прямой, пока не столкнутся со стенкой. Излучение в этом случае возникает только при отражении от стенок, не смотря на то что в объеме плазмы могут существовать флуктуации заряда или тока.

## § 12.4. Тормозное излучение

Одной из причин излучения частиц являются столкновения. Излучение электромагнитных волн, возникающее при столкновениях, называется тормозным излучением. Точный расчет спектра и интенсивности тормозного излучения довольно громоздок, и мы не будем его приводить. Однако, используя формулу Лармора для скорости потери энергии нерелятивистской заряженной частицей

$$\frac{dW_r}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2}{c^3} \quad (12.18)$$

( $e$  — заряд;  $a$  — ускорение), можно оценить интегральную интенсивность излучения.

Рассмотрим столкновение электрона и иона с зарядом  $Ze$ , изображенное на рис. 12.1. Если прицельный параметр равен  $s$ , то продолжительность столкновения можно считать примерно равной

$$\Delta t = \frac{s}{v}, \quad (12.19)$$

где  $v$  — скорость электрона.

Ускорение электрона равно

$$a \approx \frac{Ze^2}{ms^2}.$$

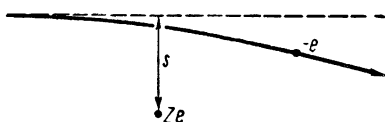


Рис. 12.1. Столкновение электрона и иона.

Следовательно, полная энергия, излученная при столкновении, может быть вычислена следующим образом:

$$W_r = \frac{dW_r}{dt} \Delta t \approx \frac{e^2}{c^3} \left( \frac{Ze^2}{ms^2} \right)^2 \frac{s}{v} = \frac{Z^2 e^6}{m^2 c^3 v} \cdot \frac{1}{s^3}.$$

Поперечное сечение, соответствующее приращению прицельного параметра  $ds$ , равно  $2\pi s ds$ , и, следовательно, интегральное сечение потери энергии равно

$$\sigma W_r = \int W_r \cdot 2\pi s ds \approx 2\pi \frac{Z^2 e^6}{m^2 c^3 v} \int \frac{ds}{s^3}. \quad (12.20)$$

Этот интеграл расходится при нижнем пределе в силу приближенной трактовки процесса столкновения. Применяемый нами метод перестает быть справедливым, когда потенциальная энергия превышает кинетическую, т. е. когда

$$Z \frac{e^2}{s} > \frac{1}{2} mv^2, \quad \text{или} \quad s < \frac{2Ze^2}{mv^2}. \quad (12.21)$$

Так же как и в § 8.5, необходимо учитывать квантовомеханическое ограничение минимальной величины прицельного параметра. Поскольку неопределенность в расчетах прицельного параметра равна

$$\Delta s = \frac{\hbar}{mv}, \quad (12.22)$$

столкновения с прицельными параметрами, меньшими  $\Delta s$ , нельзя рассматривать классическим методом. Таким образом, интегрирование в выражении (12.20) необходимо оборвать на значении  $s$ , равном большей из величин

(12.21) и (12.22). Следует иметь в виду, что квантовомеханический предел больше классического при условии

$$\frac{v}{c} > \frac{2Ze^2}{\hbar c} = \frac{Z}{68}. \quad (12.23)$$

Для электронов с энергией, большей 50 эв (если  $Z = 1$ ), квантовомеханический предел больше классического и интегральное сечение потерь энергии равно

$$\sigma W_r \approx 2\pi \frac{Z^2 e^2}{\hbar c} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 mc^2 \text{ (эрг} \cdot \text{см}^2\text{)}. \quad (12.24)$$

Сравним теперь нашу приближенную формулу с результатами точных вычислений\*. Дифференциальное сечение рассеяния электронов на ядре с зарядом  $Ze$  при кинетической энергии электронов  $T_0$ , меньшей их собственной энергии (510 кэв), и одновременно излучении фотона энергии  $u$  равно

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{du} du &= \frac{8}{3} \frac{Z^2 e^2}{\hbar c} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{mc^2}{T_0} \cdot \frac{du}{u} \ln \left[ \frac{(V T_0 + \sqrt{T_0 - u})^2}{u} \right] \cdot \frac{\xi_1}{\xi_0} \times \\ &\times \frac{1 - e^{-2\pi\xi_0}}{1 - e^{-2\pi\xi_1}}, \end{aligned} \quad (12.25)$$

где

$$\xi_0 = \frac{Ze^2}{\hbar v_0}, \quad \xi_1 = \frac{Ze^2}{\hbar v_1}. \quad (12.26)$$

Здесь  $v_0$  и  $v_1$  — соответственно начальная и конечная скорости электрона; следовательно,

$$T_0 = \frac{mv_0^2}{2}, \quad T_1 = \frac{mv_1^2}{2} = T_0 - u. \quad (12.27)$$

Уравнение (12.25) определяет спектр фотонов, излучаемых электронами энергии  $T_0$ . Спектр энергии излучения, приходящийся на интервал  $du$  энергии фотонов, можно получить, умножив выражение (12.25) на энергию фотона  $u$ . Исследуем характер этого энергетического спектра, который пропорционален функции

$$S(u) = \ln \left[ \frac{(V T_0 + \sqrt{T_0 - u})^2}{u} \right] \frac{\xi_1}{\xi_0} \cdot \frac{1 - e^{-2\pi\xi_0}}{1 - e^{-2\pi\xi_1}}. \quad (12.28)$$

\* См. Г а й т л е р. «Квантовая теория излучения». М., Изд-во иностр. лит., 1956.

Во-первых, при малых  $u$   $\xi_1$  стремится к  $\xi_0$  и, следовательно, множитель, зависящий от  $\xi$ , стремится к единице. Тогда

$$S(u) \approx \ln \frac{4T_0}{u} \quad \text{для } u \ll T_0. \quad (12.29)$$

Хотя спектр обращается в бесконечность при стремлении  $u$  к нулю, эта особенность несущественна, так как не мешает получить конечное выражение для полной энергии. Кроме того, в плазме эта особенность несущественна еще и из-за наличия дебаевского экранирования. (При рассеянии электронов на нейтральных атомах данная особенность компенсируется экранированием ядра электронами оболочки.) Если прицельные параметры больше дебаевского радиуса, то рассеяние сильно ослабляется. Основная частота тока, соответствующего частице, рассеивающейся с прицельным параметром, равным  $\lambda_D$ , составит

$$\omega = \frac{v_0}{\lambda_D}.$$

Очевидно, что основная частота испускаемого в этом случае излучения такая же. Поэтому минимальная энергия, ниже которой выражение (12.28) перестает быть справедливым, имеет вид

$$u = \hbar\omega \approx \hbar v_0 \left( \frac{4\pi N e^2}{\frac{1}{2} m v_T^2} \right)^{1/2} \approx \left( \frac{v_0}{v_T} \right) \hbar\omega_p, \quad (12.30)$$

где  $v_T$  — тепловая скорость электронов в экранирующей области плазмы, а  $\omega_p$  — плазменная частота. Согласно выражению (12.5) или (12.6), эта энергия фотона должна быть много меньше средней кинетической энергии электронов.

Далее, рассмотрим случай больших энергий фотонов  $u$ . Очевидно, что  $u$  не может быть больше начальной кинетической энергии электронов  $T_0$ . При стремлении  $u$  к  $T_0$  логарифм в выражении (12.28) обращается в нуль. Однако  $\xi_1$  одновременно стремится к бесконечности, и в результате все выражение для  $S(u)$  остается конечным.

На рис. 12.2 изображен вид точной функции  $S(u)$ , рассчитанной для электронов с энергией 1 и 10 кэВ, рассеивающихся на ионах водорода ( $Z = 1$ ). На том же рисунке показана кривая, получающаяся при замене функции  $\xi$  на 1.

Для получения интегрального сечения потерь энергии необходимо проинтегрировать  $S(u)$  по интервалу  $0 \leq u \leq T_0$ . Если заменить функцию  $\xi$  на 1, интеграл вычисляется аналитически

$$\int_0^{T_0} S(u) du \approx 2T_0. \quad (12.31)$$

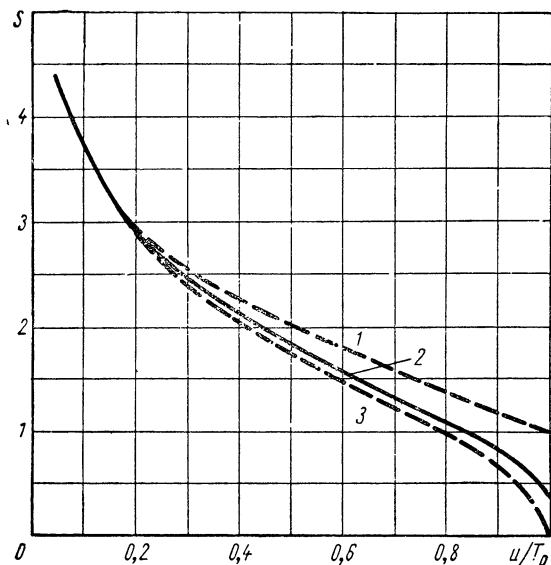


Рис. 12.2. Энергетический спектр тормозного излучения в водороде:

1 — с энергией электронов 1 кэв; 2 — энергии 10 кэв; 3 — соответствует замене функции  $\xi$  на 1.

Интегральное сечение потерь энергии при этом оказывается приближенно равным

$$\sigma W_r = \int_0^{T_0} u d\sigma \approx \frac{16}{3} \frac{Z^2 e^2}{\hbar c} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 mc^2. \quad (12.32)$$

Полученная нами ранее оценка той же величины (12.24) хорошо совпадает с (12.32).

Для рассеяния электронов на водороде с энергией 1 кэв приближенный результат (12.31) лишь на 15% меньше

точного значения, полученного численным интегрированием. При больших энергиях ошибка становится еще меньше. Для большинства приложений приближенное выражение (12.32) интегрального сечения потерь энергии вполне достаточно. Это сечение не зависит от энергии электронов. Выражая его численно, получим

$$\sigma W_r \approx 1,6 \cdot 10^{-24} Z^2 (\kappa \varepsilon v \cdot \text{с.м}^2). \quad (12.33)$$

С помощью последнего выражения можно вычислить скорость потери энергии плазмой в результате тормозного излучения при температуре  $\theta$  в расчете на один электрон:

$$\frac{dW}{dt} = 3,3 \cdot 10^{-15} Z^2 N_i \sqrt{\theta (\kappa \varepsilon v)} \left( \frac{\kappa \varepsilon v}{\text{сек}} \right), \quad (12.34)$$

где  $N_i$  — плотность ионов.

Следует отметить, что при столкновениях электрона с электроном излучение отсутствует, поскольку электрический дипольный момент двух электронов равен нулю. В таких столкновениях может возникать квадрупольное электрическое или магнитное дипольное излучение, но для нерелятивистских температур оно пренебрежимо слабо.

Выражение (12.34) применимо к оптически прозрачной плазме, т. е. к такой, которая не поглощает собственного излучения.

Наиболее просто оптическую прозрачность плазмы можно оценить, сравнивая полное количество излучения, испускаемого плазмой (12.34), с излучением, которое бы она испускала, если бы была черным телом (12.9).

Если энергия тормозного излучения намного меньше энергии излучения плазмы как черного тела, то плазму можно считать оптически прозрачной. В противном случае, если плазма оптически непрозрачна, для определения потерь энергии за счет излучения необходимо решать задачу переноса лучистой энергии\*.

## § 12.5. Циклотронное излучение

Поскольку на заряженные частицы, находящиеся в магнитном поле, постоянно действует сила Лоренца, они должны непрерывно излучать. Это излучение называется циклотронным излучением.

\* См., например, С. Ч а н д р а с е к а р. Перенос лучистой энергии. М., Изд-во иностр. лит., 1953.



Для того чтобы определить поток излучения, испускаемого электронами с энергией меньше  $mc^2$  (510 кэв), можно опять воспользоваться формулой Лармора (12.18)

$$\frac{dW_r}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} (\omega_e v_{\perp})^2 = \frac{4}{3} \frac{e^2}{mc^3} \left(\frac{eB}{mc}\right)^2 \left(\frac{1}{2} mv_{\perp}^2\right) \left(\frac{\omega_p c}{c\omega_e}\right). \quad (12.35)$$

Выражая численно входящие в последнюю формулу величины, получаем для электронного газа с температурой  $\theta$

$$\frac{dW_r}{dt} = 4,0 \cdot 10^{-9} B^2 \theta \left(\frac{\kappa \omega_e}{c\omega_e}\right), \quad (12.36)$$

где  $B$  — в гауссах, а  $\theta$  — в килоэлектронвольтах.

Для сравнения потерь энергии при циклотронном излучении с потерями при тормозном излучении обозначим отношение магнитного и кинетического давлений  $\eta$ . Тогда

$$\frac{B^2}{8\pi} = \eta N_e \theta, \quad (12.37)$$

где  $N_e$  — плотность электронов. Уравнение (12.36) можно переписать в виде

$$\frac{dW_r}{dt} = 1,6 \cdot 10^{-16} N_e \cdot \eta \cdot \theta^2, \quad (12.38)$$

где  $\theta$  снова в килоэлектронвольтах. Сравняя последнее уравнение с выражением (12.34), можно сделать вывод, что потери энергии в водороде на циклотронное излучение больше потерь на тормозное излучение для температуры свыше 7,5 кэв при  $\eta = 1$ . Если же кинетическое давление меньше магнитного, то циклотронное излучение начинает доминировать при еще более низких температурах.

Частотный спектр циклотронного излучения состоит из ларморовской частоты и ее гармоник. Наличие гармоник объясняется весьма просто. Плотность тока в каждой точке круговой траектории иона как функция времени может быть представлена в виде последовательности  $\delta$ -функций, отстоящих друг от друга на ларморовский период. Поэтому в разложении плотности тока в ряд Фурье по времени фигурируют все кратные частоты. Эти же частоты, конечно, содержатся и в излучении.

Когда скорость  $v$  электрона значительно меньше  $c$ , подавляющая часть энергии излучается на основной частоте. Эти свойства циклотронного излучения рассмотрены в де-

талях в работе Швингера\* для произвольной энергии электронов. Количество энергии, излучаемой в единицу времени на каждой гармонике основной частоты, может быть представлено в виде ряда по степеням  $v/c$ . (Выбираем такую систему координат, в которой центр ларморовской окружности неподвижен.) Для небольших  $v/c$  мощность излучения на каждой гармонике приближенно дается первым членом такого ряда. Мощность, соответствующая  $n$ -й гармонике, равна

$$P_n \approx 2(n+1) \frac{n^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{e^2}{c} \omega_e^2 \left(\frac{v}{c}\right)^{2n}. \quad (12.39)$$

В частности,

$$P_1 \approx \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \omega_e^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2;$$

$$P_2 \approx \frac{8}{5} \frac{e^2}{c} \omega_e^2 \left(\frac{v}{c}\right)^4;$$

$$P_3 \approx \frac{243}{70} \frac{e^2}{c} \omega_e^2 \left(\frac{v}{c}\right)^6.$$

Для энергии электронов  $50 \text{ кэВ}$   $v^2/c^2 \approx 1/5$  и относительная величина  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  соответственно равна 1, 1/2, 1/5.

Следует отметить, что ларморовская частота уменьшается с приближением к релятивистской области энергий. Релятивистское выражение для ларморовской частоты имеет вид

$$\omega_e = \frac{eB}{mc} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (12.40)$$

где  $m$  — масса покоя.

Изложенные результаты относятся к одной частице. При рассмотрении излучения в плазме необходимо учитывать ее диэлектрические свойства. В частности, если ларморовская частота меньше плазменной, то излучение с основной частотой может оказаться сильно ослабленным. Условие малости частоты плазмы по сравнению с частотой  $n$ -й гармоники излучения выглядит следующим образом:

$$n\omega_e > \omega_p.$$

\* J. S c h w i n g e r. Phys. Rev., 75, 1912 (1949).

Его можно также представить одной из нижеприведенных форм:

$$n^2 > 4\pi N_e \frac{mc^2}{B^2};$$

$$n^2 > 8\pi N_e \left(\frac{\theta}{B^2}\right) \left(\frac{mc^2}{2\theta}\right);$$

$$n^2 > \frac{1}{\eta} \cdot \frac{250 \text{ кэВ}}{\theta},$$

выражая явно через температуру и отношение давлений  $\eta$ .

При температуре 50 кэВ и  $\eta = 1$  частоты третьей и более высоких гармоник выше плазменной. Для этих гармоник результаты, полученные для одной частицы, имеют приближенный характер.

В случае оптически плотной плазмы необходимо учитывать собственное поглощение излучения. Роль циклотронного излучения для проблемы управляемых термоядерных реакций была проанализирована Трубниковым и Кудрявцевым\*, а также многими другими.

Обзор и библиография работ, посвященных этому вопросу, приведены в статье Ризенфельда\*\*.

---

\* Б. А. Трубников и В. С. Кудрявцев. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958». Доклады советских ученых. Ядерная физика. М., Атомиздат, 1959, стр. 165.

\*\* W. Riesenfeld. Plasma Physics and Thermonuclear Reactors. Vol. 2. Pergamon Press. (N. Y.), 1963.

## ЛИТЕРАТУРА

### Глава 1

- Vlasov A. Kinetic theory of an assembly of particles with collective interaction. *J. Phys. USSR*, **9**, 25 (1945).
- Greenstein J., Minkowski R. The crab nebula as a radio source. *Astrophys. J.*, **118**, 1 (1953).
- Fermi F. Galactic magnetic fields and the origin of cosmic radiation. *Astrophys. J.*, **119**, 1 (1954).
- Baade W., Minkowski R. On the identification of radio sources. *Astrophys. J.*, **119**, 215 (1954).
- Balcock H., Babcock H. The sun's magnetic field 1952—1954. *Astrophys. J.*, **121**, 349 (1955).
- Babcock H. The magnetic variable HD71866. *Astrophys. J.*, **124**, 489 (1956).
- Fan C. Non-thermal radio emission of the galaxy and the origin of cosmic radiations. *Astrophys. J.*, **123**, 491 (1956).
- Watson I. K. Use of Boltzmann equation for study of ionized gases of low density. *Phys. Rev.*, **102**, 12 (1956); Brueckner K., Watson K. *Phys. Rev.*, **102**, 19 (1956).
- Chew G. et al. The Boltzmann equation and the one-fluid hydromagnetic equations in the absence of particle collisions. *Proc. Roy. Soc.*, **A236**, 112 (1956).
- Chandrasekhar S. et al. Properties of an ionized gas, of low density in a magnetic field. *Ann. Phys.*, **2**, 435 (1957); **5**, 1 (1958).
- Low F. A Lagrangian formulation of the Boltzmann — Vlasov equation for plasmas. *Proc. Roy. Soc.*, **A248**, 282 (1958).
- Weibel E. Confinement of a plasma by magnetostatic fields. *Phys. Fluids*, **2**, 52 (1959).
- Elmore W. et al. Inertial-electrostatic confinement of a plasma. *Phys. Fluids*, **2**, 239 (1959).
- Green H. Ionic theory of plasmas and magnetohydrodynamics. *Phys. Fluids*, **2**, 341 (1959).
- Babcock H. The 34-kilogauss magnetic field of HD215441. *Astrophys. J.*, **132**, 521 (1960).
- Woltjer L. The magnetic field intensity in the galaxy. *Astrophys. J.*, **133**, 352 (1961).
- Buneman O. Gas law and conductivity of a collision-free plasma. *Phys. Fluids*, **4**, 669 (1961).
- Hoye F., Harwit M. Plasma dynamics in comets. *Astrophys. J.*, **135**, 867, 875 (1962).
- Yang H. Moment equations and boundary conditions for magnetogas dynamics. *Phys. Fluids*, **5**, 1580 (1962).
- Hepner J. et al. Explorer 10 magnetic field measurements. *J. Geophys. Res.*, **68**, 1 (1963).

- Поппе J. A high latitude investigation of the natural very — low-frequency electromagnetic radiation known as chorus. *J. Geophys. Res.*, **68**, 83 (1963).
- Акасофу S., Чапман S. The development of the main phase of magnetic storms. *J. Geophys. Res.*, **68**, 125 (1963).

## Глава 2

- Спитцер L. Equations of motion for an ideal plasma. *Astrophys. J.*, **116**, 299 (1952).
- Вентзел D. Motion of charged particles in a force-free magnetic field. *Astrophys. J.*, **126**, 559 (1957).
- Брагинский С. И. О поведении полностью ионизованной плазмы в сильном магнитном поле. «Ж. Эксперим. и теор. физ.», **33**, 645 (1957).
- Ньюкомб W. Motion of magnetic lines of force. *Ann. Phys. (N.—Y)*, **3**, 347 (1958).
- Ленард A. Adiabatic invariance to all orders. *Ann. Phys. (N.—Y)*, **6**, 261 (1959).
- Вандервоорт P. The nonconstancy of the adiabatic invariants. *Ann. Phys. (N. Y.)*, **12**, 436 (1961).
- Нордхорп T. The guiding center approximation to charged particle motion. *Ann. Phys. (N. Y.)*, **15**, 79 (1961).
- Мишкин E., Радер C. Motion of a charged particle in an axially symmetric magnetostatic field. *Phys. Fluids*, **4**, 783 (1961).
- Рэй E., Каспер J. Some theorems concerning the motion of an electrically charged particle in a dipole magnetic field. *Ann. Phys. (N. Y.)*, **20**, 119 (1962).

## Глава 3

- Беннетт W. Magnetically self-focussing streams. *Phys. Rev.*, **45**, 890 (1934).
- Чандрасекар S., Ферми E. Problems of gravitational stability in the presence of a magnetic field. *Astrophys. J.*, **118**, 116 (1953).
- Гиллестад G. On equilibrium configurations of oblate fluid spheroids with a magnetic field. *Astrophys. J.*, **119**, 14 (1954).
- Ферраро V. On the equilibrium of magnetic stars. *Astrophys. J.*, **119**, 407 (1954).
- Чандрасекар S., Кендалл P. On force-free magnetic fields. *Astrophys. J.*, **126**, 457 (1957).
- Паргаманик Л. Э. К кинетической теории электронного газа при наличии границ. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **33**, 251 (1957).
- Крускал M., Кулсруд R. Equilibrium of magnetically confined plasmas in a toroid. *Phys. Fluids*, **1**, 265 (1958).
- Шафранов В. Д. О равновесии плазменного тора в магнитном поле. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **37**, 1088 (1959).
- Кадомецев Б. Б. О равновесии плазмы при винтовой симметрии. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **37**, 1352 (1959).
- Вернштейн I. and Рабинович I. Theory of electrostatic probes in a low-density plasma. *Phys. Fluids*, **2**, 112 (1959).

- Newcomb W. Magnetic differential equations. *Phys. Fluids*, **2**, 362 (1959).
- Cole J., Huth J. Some interior problems in hydromagnetics. *Phys. Fluids*, **2**, 624 (1959).
- Wentzel D. On the shape of magnetic stars. *Astrophys. J.*, **133**, 170, (1961).
- Комаров Н. Н., Фадеев В. М. Плазма в самосогласованном поле. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **41**, 528 (1961).
- Kulsrud R. Hydromagnetic equilibria in a toroid from the particle point of view. *Phys. Fluids*, **4**, 302 (1961).
- Sherby-Harvie R. B. R. Schmidt's virial theorem for plasmas. *Phys. Fluids*, **4**, 389 (1961).
- Greene J., Johnson J. Determination of hydromagnetic equilibria. *Phys. Fluids*, **4**, 875 (1961).
- Hand G., Levine M. New approach to force-free magnetic fields. *Phys. Rev.*, **127**, 1856 (1962).

#### Глава 4

- Batchelor G. On the spontaneous magnetic field in a conducting liquid in turbulent motion. *Proc. Roy. Soc.*, **A201**, 405 (1950).
- Chandrasekhar S. The invariant theory of isotropic turbulence in magnetohydrodynamics. *Proc. Roy. Soc. (Lond)*, **A204**, 435 (1951); **207**, 301 (1951).
- Parker E. Hydromagnetic dynamo models. *Astrophys. J.*, **122**, 293 (1955).
- Parker E., Crook M. Diffusion and severing of magnetic lines of force. *Astrophys. J.*, **124**, 214 (1956).
- Chandrasekhar S. Effect of internal motions on the decay of a magnetic field in a fluid conductor. *Astrophys. J.*, **124**, 244 (1956).
- Bacskus G. The external electric field of a rotating magnet. *Astrophys. J.*, **123**, 508 (1956).
- Bostick W. Experimental study of ionized matter projected across a magnetic field. *Phys. Rev.*, **104**, 292 (1956).
- Bacskus G. The axisymmetric self-excited fluid dynamo. *Astrophys. J.*, **125**, 500 (1957).
- Шафранов В. Д. Магнито-вихревые кольца. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **33**, 831 (1957).
- Bostick W. Experimental study of plasmoids. *Phys. Rev.*, **106**, 404 (1957).
- Bacskus G. A class of self-sustaining dissipative spherical dynamos. *Ann. Phys. (N. Y.)*, **4**, 372 (1958).
- Parker E. Interaction of the solar wind with the geomagnetic field. *Phys. Fluids*, **1**, 171 (1958).
- Kraus L., Watson K. Plasma motions induced by satellites in the ionosphere. *Phys. Fluids*, **1**, 480 (1958).
- Миллер М. А. Ускорение плазменных сгустков высокочастотным электромагнитным полем. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **36**, 1909 (1959).
- Linhart J. Accelerated self-constricted electron streams in a plasma. *Proc. Roy. Soc. (Lond)*, **A249**, 318 (1959).

- K a l m a n G. Non-linear oscillations and nonstationary flow in a zero temperature plasma. *Ann. Phys. (N. Y.)*, **10**, 1, 29 (1960).
- P a r k e r E. Sudden expansion of the corona following a large solar flare and the attendant magnetic field and cosmic-ray effects. *Astrophys. J.*, **133**, 1014 (1961).
- A l f v é n H. On the origin of cosmic magnetic fields. *Astrophys. J.*, **133**, 1049 (1961).
- H u r l e y J. Interaction of a streaming plasma with the magnetic field of a line current. *Phys. Fluids*, **4**, 109 (1961).
- K a t z S. Lagrangean density for an inviscid, perfect, compressible plasma. *Phys. Fluids*, **4**, 345 (1961).
- H u r l y J. Interaction of a streaming plasma with the magnetic field of a two-dimensional dipole. *Phys. Fluids*, **4**, 854 (1961).
- L i n S. Limiting velocity for a rotating plasma. *Phys. Fluids*, **4**, 1277 (1961).
- S u C. Variational principles in plasma dynamics. *Phys. Fluids*, **4**, 1376 (1961).
- E u b a n k H., W i l k e r s o n T. Plasma motion in a curved magnetic field. *Phys. Fluids*, **4**, 1407 (1961).
- B a k e r D. et al. Rotating plasma experiments. *Phys. Fluids*, **4**, 1534, 1549 (1961).
- M e s t e l L., R o x b u r g h I. On the thermal generation of toroidal magnetic fields in rotating stars. *Astrophys. J.*, **136**, 615 (1962).
- K a r l s o n E. Motion of charged particles in an inhomogeneous magnetic field. *Phys. Fluids*, **5**, 476 (1962).

## *Глава 5*

- T o n k s L. Trajectory-wise analysis of plasmas in magnetic field without collisions. *Phys. Rev.*, **113**, 400 (1959).
- K i l l e e n J. et al. Boundary-layer formation in the pinch. *Phys. Fluids*, **3**, 387 (1960).
- М о р о з о в А. И., С о л о в ъ е в Л. С. Кинетическое рассмотрение некоторых равновесных плазменных конфигураций. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **40**, 1316 (1961).
- H u r l e y J. Analysis of the transition region between a plasma and its confining magnetic field. *Phys. Rev.*, **124**, 1307 (1961).
- M j o l s n e s s R. et al. Self-consistent reversed field sheath. *Phys. Fluids*, **4**, 730 (1961).
- G r a d H. Boundary layer between a plasma and a magnetic field. *Phys. Fluids*, **4**, 1366 (1961).

## *Глава 6*

- T h o m s o n J. J. The electrodeless discharge through gases. *Phys. Soc. Proc.*, **40**, 82 (1928).
- L a n g m u i r I., T o n k s L. Oscillations in ionized gases. *Phys. Rev.*, **33**, 195 (1929).
- T o n k s L. The high frequency behavior of a plasma. *Phys. Rev.*, **37**, 1458 (1931).

- Landau L. On the vibrations of the electronic plasma. *J. Phys. USSR*, **10**, 25 (1946).
- Bohm D., Gross E. Theory of plasma oscillations. *Phys. Rev.*, **75**, 1851, 1864 (1949).
- Bohm D., Gross E. Effects of plasma boundaries in plasma oscillations. *Phys. Rev.*, **79**, 992 (1950).
- Gross E. Plasma oscillations in a static magnetic field. *Phys. Rev.*, **82**, 232 (1951).
- Bohm D., Pines D. A collective description of electron interactions, *Phys. Rev.*, **82**, 625 (1951); **85**, 338 (1952).
- Kok J. On electrostatic plasma oscillations in metals. *Physica*, **17**, 543 (1951).
- Gabor D. Wave theory of plasmas. *Proc. Roy. Soc.*, **A213**, 73 (1952).
- Ferraro V. On the reflection and refraction of Alfvén waves. *Astrophys. J.*, **119**, 393 (1954).
- Looney D., Brown S. Excitation of plasma oscillations. *Phys. Rev.*, **93**, 965 (1954).
- Roberts P. On the reflection and refraction of hydromagnetic waves. *Astrophys. J.*, **121**, 720 (1955).
- Jensen E. Toroidal oscillations of an incompressible conductive fluid sphere in a decay field. *Astrophys. J., Suppl., Ser. 2.*, 141 (1955—56).
- Van Kampen N. On the theory of stationary waves in plasmas. *Physica*, **21**, 949 (1955).
- Ахизер А. И., Ситенко А. Г. О колебаниях электронной плазмы во внешнем магнитном поле. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **30**, 216 (1956).
- Половин Р. В. К нелинейной теории продольных колебаний плазмы. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **31**, 354 (1956).
- Кадоццев Б. Б. О гидродинамическом описании плазменных колебаний. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **31**, 1083 (1956).
- Stix T. Oscillations of a cylindrical plasma. *Phys. Rev.*, **106**, 1146 (1957).
- Pradhan T. Plasma oscillations in a steady magnetic field. *Phys. Rev.*, **107**, 1222 (1957).
- Bernstein I. et al. Exact non-linear plasma oscillations. *Phys. Rev.* **108**, 546 (1957).
- Sturrock P. Non-linear effects in electron plasmas. *Proc. Roy. Soc.*, **A242**, 277 (1957).
- Sturrock P. A variational principle and an energy theorem for small-amplitude disturbances of electron beams and of electron-ion plasmas. *Ann. Phys. (N. Y.)*, **4**, 306 (1958).
- Ferraro V., Plumpton C. Hydromagnetic waves in a horizontally stratified atmosphere. *Astrophys. J.*, **127**, 459 (1958).
- Parker E. Suprathermal particle generation in the solar corona. *Astrophys. J.*, **128**, 677 (1958).
- Денисов Н. Г. К вопросу о поглощении электромагнитных волн в резонансных областях неоднородной плазмы. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **34**, 528 (1958).
- Степанов К. Н. Низкочастотные колебания плазмы в магнитном поле. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **35**, 1155 (1958).
- Bernstein I. Waves in a plasma in a magnetic field. *Phys. Rev.*, **109**, 10 (1958).



- Drummond J. Basic microwave properties of hot magnetoplasmas. *Phys. Rev.*, **110**, 293 (1958); **112**, 1460 (1958).
- Hwa R. Effects of electron-electron interactions on cyclotron resonance in gaseous plasmas. *Phys. Rev.*, **110**, 307 (1958).
- Leonard A., Bernstein I. Plasma oscillations with diffusion in velocity space. *Phys. Rev.*, **112**, 1456 (1958).
- Berger J. et al. Heating of a confined plasma by oscillating electromagnetic fields. *Phys. Fluids*, **1**, 301 (1958).
- Stix T. Generation and thermalization of plasma waves. *Phys. Fluids*, **1**, 308 (1958).
- Auer P. et al. Collective oscillations in a cold plasma. *Phys. Fluids*, **1**, 501 (1958).
- Case K. Plasma oscillations. *Ann. Phys. (N. Y.)*, **7**, 349 (1959).
- Габович М. Д., Пасечник Л. Л. Аномальное рассеяние электронов и возбуждение плазменных колебаний. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **36**, 1025 (1959).
- Климентович Ю. Л. Потери энергии заряженных частиц на возбуждение колебаний в плазме. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **36**, 1405 (1959).
- Степанов К. Н. О проникновении электромагнитного поля в плазму. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **36**, 1457 (1959).
- Ахизер И. А., Половин Р. В. К теории релятивистских магнитогидродинамических волн. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **36**, 1845 (1959).
- Гершман Б. Н. О негирорезонансном поглощении электромагнитных волн в плазме. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **38**, 912 (1960).
- Dawson J., Oberman C. Oscillations of a finite cold plasma in a strong magnetic field. *Phys. Fluids.*, **2**, 103 (1959).
- Doyle P., Neufeld J. Behavior of plasma at ionic resonance. *Phys. Fluids*, **2**, 390 (1959).
- Montgomery D. Non-linear Alfvén waves in a cold ionized gas. *Phys. Fluids*, **2**, 585 (1959).
- Dawson J. Non-linear electron oscillations in a cold plasma. *Phys. Rev.*, **113**, 383 (1959).
- Sturrock P. Action transfer and frequency-shift relations in the nonlinear theory of waves and oscillations. *Ann. Phys. (N. Y.)*, **9**, 422 (1960).
- Гершман Б. Н. О гирорезонансном поглощении электромагнитных волн в плазме. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **38**, 912 (1960).
- Kritz A., Mintzer D. Propagation of plasma waves across a density discontinuity. *Phys. Rev.*, **117**, 382 (1960).
- Dawson J. Plasma oscillations of a large number of electron beams. *Phys. Rev.*, **118**, 381 (1960).
- Stix T. Absorption of plasma waves. *Phys. Fluids*, **3**, 19 (1960).
- Rand S. Wake of a satellite traversing the ionosphere. *Phys. Fluids*, **3**, 265 (1960).
- Montgomery D. Stability of large amplitude waves in the onedimensional plasma. *Phys. Fluids*, **3**, 274 (1960).
- Weibel E. S. Oscillations of a nonuniform plasma. *Phys. Fluids*, **3**, 399 (1960).

- R and S. Damping of the satellite wake in the ionosphere. *Phys. Fluids*, **3**, 588 (1960).
- K ar plus R. Radiation of hydromagnetic waves. *Phys. Fluids*, **3**, 800 (1960).
- B uch sb au m S. et al. Interaction between cold plasmas and guided electromagnetic waves. *Phys. Fluids*, **3**, 806 (1960).
- P ap pe r t R. Charge excitation of plasma motion in a magnetic field. *Phys. Fluids*, **3**, 966 (1960).
- D ou gh e r t y J., Farley D. A theory of incoherent scattering of radio waves by a plasma. *Proc. Roy. Soc.*, **A259**, 79 (1960); **263**, 238 (1961).
- G re i f i n g e r P. Induced oscillations in a rarefied plasma in a magnetic field. *Phys. Fluids*, **4**, 104 (1961).
- F r i e d B., Gould R. Longitudinal ion oscillations in a hot plasma. *Phys. Fluids*, **4**, 139 (1961).
- W i l h e l m s s o n H. Stationary nonlinear plasma oscillations. *Phys. Fluids*, **4**, 335 (1961).
- R o s e n P. Generation of the third harmonic by an electromagnetic signal in a plasma. *Phys. Fluids*, **4**, 341 (1961).
- P o e v e r l e i n H. Propagation of electromagnetic waves in a plasma with strong magnetic field. *Phys. Fluids*, **4**, 397 (1961).
- D a w s o n J. Landau damping. *Phys. Fluids*, **4**, 869 (1961).
- H o o k e W. et al. Experiments on ion cyclotron waves. *Phys. Fluids*, **4**, 1131 (1961).
- S c h u b e r t G., Turcotte D. Interaction of low-frequency electromagnetic waves with a plasma. *Phys. Fluids*, **4**, 1156 (1961).
- K o g a T. Interaction between a radio wave and a plasma. *Phys. Fluids*, **4**, 1162 (1961).
- W e i t z n e r H. Green's function for two-dimensional magnetohydrodynamic waves. *Phys. Fluids*, **4**, 1238, 1246 (1961).
- P l a t z m a n P., Buchsbaum S. Effect of collisions on the Landau damping of plasma oscillations. *Phys. Fluids*, **4**, 1288 (1961).
- H a y e s J. Damping of plasma oscillations in the linear theory. *Phys. Fluids*, **4**, 1387 (1961).
- V e r n o n R. Influence of ion motions on nonlinear plasma oscillations. *Phys. Fluids*, **4**, 1524 (1961).
- W h i t m e r R., Barrett E. Non-linear interaction of an electromagnetic wave with a plasma layer. *Phys. Rev.*, **121**, 661 (1961); **125**, 1478 (1962).
- P r a d h a n T. Causality and the dispersion formulas for waves in a plasma. *Ann. Phys. (N. Y.)*, **17**, 418 (1962).
- W u C. Landau damping and resonant energy absorption. *Phys. Rev.*, **127**, 1419 (1962).
- W e i n b e r g S. Eikonal method in magnetohydrodynamics. *Phys. Rev.*, **126**, 1899 (1962).
- D a w s o n J. One-dimensional plasma model. *Phys. Fluids*, **5**, 445 (1962).
- E n o c h J. Non-linearized theory of transverse plasma oscillations. *Phys. Fluids*, **5**, 467 (1962).

- Kofooid M. Experimental two-beam excitation of plasma oscillations. *Phys. Fluids*, **5**, 712 (1962).
- Weitzner H. Green's function for the linearized Vlasov equation. *Phys. Fluids*, **5**, 933 (1962).
- Oberman C. et al. High-frequency conductivity of a fully ionized plasma. *Phys. Fluids*, **5**, 1514 (1962).
- Zelazny R. The general solution of the initial value problem for longitudinal plasma oscillations. *Ann. Phys. (N. Y.)*, **19**, 177 (1962); **20**, 261 (1962).
- Bazer J., Hurley J. Geometrical hydromagnetics. *J. Geophys. Res.*, **68**, 147 (1963).

## Глава 7

- Hoffmann F., Teller E. Magneto-hydrodynamic shock waves. *Phys. Rev.*, **80**, 692 (1950).
- Helfer H. Magnetohydrodynamic shock. *Astrophys. J.*, **117** (1953).
- Киселев М. И., Цепляев В. И. Наклонные ударные волны в плазме с конечной проводимостью. (*Ж. эксперим. и теор. физ.*), **34**, 1605 (1958).
- Tidman D. Structure of a shock wave in fully ionized hydrogen. *Phys. Rev.*, **111**, 1439 (1958).
- Krook M. Structure of shock fronts in ionized gases. *Ann. Phys. (N. Y.)*, **6**, 188 (1959).
- Parker E. Plasma dynamical determination of shock thickness in an ionized gas. *Astrophys. J.*, **129**, 217 (1959).
- Bszer J., Ericson W. Hydromagnetic shocks. *Astrophys. J.*, **129**, 758 (1959).
- Colgate S. Collisionless plasma shock. *Phys. Fluids*, **2**, 485 (1959).
- Ericson W., Bazer J. Certain properties of hydromagnetic shocks. *Phys. Fluids*, **3**, 631 (1960).
- Noerdlinger P. Concerning certain collisionless plasma-shock wave models. *Astrophys. J.*, **133**, 1034 (1961).
- Greifinger C., Cole J. Cylindrical magnetohydrodynamic shock waves. *Phys. Fluids*, **4**, 527 (1961).
- Morawets C. S. Magnetohydrodynamic shock structure without collisions. *Phys. Fluids*, **4**, 988 (1961); **5**, 1447 (1962).
- Auer P. et al. Low Mach number magnetic compression waves in a collisionfree plasma. *Phys. Fluids*, **4**, 1105 (1961); **5**, 298 (1962).
- Yoshihara H. Collisionless plasma shock waves. *Phys. Fluids*, **4**, 1361 (1961).
- Whang Y., Chang C. Structure of a weak shock wave in a plasma. *Phys. Fluids*, **5**, 228 (1962).

## Глава 8

- Persicò E. On the kinetic theory of a highly ionized gas. *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, **86**, 93 (1926).
- Bohm D., Pines D. A collective description of electron interactions. *Phys. Rev.*, **82**, 625 (1951); **85**, 338 (1952).
- Parzen P., Goldstein L. Current fluctuations in de gas discharge plasma. *Phys. Rev.*, **82**, 724 (1951).

- Gasirowicz S. et al. Dynamics of ionized media. Phys. Rev., **101**, 922 (1956).
- Rosenbluth M. et al. Fokker — Planck equation for inverse-square force. Phys. Rev., **107**, 1 (1957).
- Green H. Propagation of disturbances at high frequencies in gases, liquids and plasmas. Phys. Fluids, **2**, 31 (1959).
- Rand S. Electrostatic field about an ion moving slowly in a plasma. Phys. Fluids, **2**, 649 (1959).
- Ts Chen C. Kinetic equation for a plasma with unsteady correlations. Phys., Rev., **114**, 394 (1959).
- Leonard A. On Bogoliubov's kinetic equation for a spatially homogeneous plasma. Ann. Phys. **10**, 390 (1960).
- Константинов О. В., Перель В. И. Столкновения частиц в высокотемпературной плазме. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **39**, 861 (1960).
- Rostoker N., Rosenbluth M. Test particles in a completely ionized plasma. Phys. Fluids, **3**, 1 (1960).
- Simon A., Harris E. Kinetic equations for plasma and radiation. Phys. Fluids, **3**, 245 (1960).
- Taylor J. Electric field correlation and plasma dynamics. Phys. Fluids, **3**, 792 (1960).
- Rostoker N. Kinetic equation with a constant magnetic field. Phys. Fluids, **3**, 922 (1960).
- Jackson J. Electric field distribution in a dense plasma. Phys. Fluids, **3**, 927 (1960).
- Salpeter E. Electron density fluctuations in a plasma. Phys. Rev., **120**, 1528 (1960); **122**, 1663 (1961).
- Барабаненков Ю. Н. Изменения импульсов зарядов, сталкивающихся в магнитном поле. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **40**, 1476 (1961).
- Ахизер А. И. и др. К теории флуктуаций в плазме «Ж. эксперим. и теор. физ.», **41**, 478 (1961).
- Fried B., Wyld H. Solution for two-electron correlation function in plasma. Phys. Rev., **122**, 1 (1961).
- Ron A., Kalman G. Velocity-dependent correlations in the statistical distribution of the electric microfield in a plasma Phys. Rev., **123**, 1100 (1961).
- Kalman G. Statistical distribution of the magnetic microfield in a plasma. Phys. Fluids, **4**, 300 (1961).
- Dupree T. H. Dynamics of ionized gases. Phys. Fluids., **4**, 696 (1961).
- Gartenhaus S. Variational principle for a classical plasma. Phys. Fluids, **4**, 1122 (1961).
- Ichimaru S. Theory of fluctuations in a plasma. Ann. Phys. **20**, 78 (1962).
- Willis C. Kinetic equation for a classical plasma. Phys. Fluids, **5**, 219 (1962).
- Wolff P. Pair correlation in a plasma. Phys. Fluids, **5**, 316 (1962).
- Guernsey R. Kinetic equation for a completely ionized gas. Phys. Fluids., **5**, 322 (1962).
- Baldwin D. Close collisions in a plasma. Phys. Fluids., **5**, 1523 (1962).

## Глава 9

- L a n d s h o f f R. Transport phenomena in a completely ionized gas in presence of a magnetic field. L a n d s h o f f R. Phys. Rev., **76**, 904 (1949).
- L a n d s h o f f R. Convergence of Chapman — Enskog method for a completely ionized gas. Phys. Rev., **82**, 442 (1951).
- S p i t z e r L., H a r m R. Transport phenomena in a completely ionized gas. Phys. Rev., **89**, 977 (1953).
- M a c D o n a l d W. et al. Relaxation of system of particles with Coulomb interactions. Phys. Rev., **107**, 350 (1957).
- D r e i c e r H. Electron and ion run-away in fully ionized gases. Phys. Rev., **115**, 238 (1959); **117**, 329 (1960).
- Г у р е в и ч А. В. К теории эффекта убегающих электронов. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **39**, 1296 (1960).
- S a k u n t a l a M. et al. Ionic conductivity of highly ionized plasmas Phys. Rev., **118**, 1459 (1960).
- К а л м а н G., R o n A. Interaction of a test particle with a plasma. Ann. Phys. (N. Y.), **16**, 118 (1961).
- K r a n z e r H. C. Thermalization of a fast ion in a plasma. Phys. Fluids, **4**, 214 (1961).
- S i m o n A. Exact relativistic Fokker — Planck coefficients for plasma and radiation. Phys. Fluids, **4**, 586, 691 (1961).
- B i n g G., R o b e r t s I. End-losses from mirror machines. Phys. Fluids, **4**, 1039 (1961).
- F r i s c h H. L. Lime lag in the thermalization of a fast ion in a plasma. Phys. Fluids, **4**, 1167 (1961).
- T h e i m e n O., T a y l o r L. The dependence of the plasma conductivity on frequency and collision time. Ann Phys. (N. Y.), **11**, 377 (1960).
- Ц ы т о в и ч В. Н. О потерях энергии заряженных частиц в плазме. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **42**, 803 (1962).

## Глава 10

- C h a p m a n S. The viscosity and thermal conductivity of a completely ionized gas. Astrophys. J., **120**, 151 (1954).
- S i m o n A. Diffusion of like particles across magnetic field. Phys. Rev., **100**, 1557 (1955).
- L o n g m i r e C., R o s e n b l u t h M. Diffusion of charged particles across a magnetic field. Phys. Rev., **103**, 507 (1956).
- R o s e n b l u t h M., K a u f m a n A. Plasma diffusion in magnetic field. Phys. Rev., **109**, 1 (1958).
- K a u f m a n A. Effect of charge separation on plasma diffusion in a strong magnetic field. Phys. Fluids, **1**, 252 (1958).
- H o h F., L e h n e r t B. Diffusion processes in a plasma column in a longitudinal magnetic field. Phys. Fluids, **3**, 600 (1960).
- T o n k s L. Diffusion through a finite plasma in a uniform magnetic field. Phys. Fluids, **3**, 758 (1960).
- S p i t z e r L. Particle diffusion across a magnetic field. Phys. Fluids, **3**, 659 (1960).
- K a u f m a n A. Plasma viscosity in a magnetic field. Phys. Fluids, **3**, 610 (1960).

- W e t z e l L. Electric-field induced anisotropies in inhomogeneous plasma. *Phys. Rev.*, **123**, 722 (1961).
- M e e r o n E. Transport equations for plasmas in strong external fields. *Phys. Rev.*, **124**, 308 (1961).
- T a y l o r J. Diffusion of plasma ions across a magnetic field. *Phys. Fluids*, **4**, 1142 (1961).
- R o b i n s o n B., B e r n s t e i n I. A variational description of transport phenomena in a plasma. *Ann. Phys.* **18**, 110 (1962).
- Y o s h i k a m a S., R o s e D. Anomalous diffusion of a plasma across a magnetic field. *Phys. Fluids*, **5**, 334 (1962).

## Глава 11

- L u n d q u i s t S. On the stability of magneto-hydrostatic fields. *Phys. Rev.*, **83**, 307 (1951).
- K r u s k a l M., S c h w a r z s c h i l d M. Some instabilities of a completely ionized plasma. *Proc. Roy. Soc. (Lond)*, **A223**, 348 (1954).
- N o r t h r u p T. Helmholtz instability of a plasma. *Phys. Rev.*, **103**, 1150 (1956).
- P i e r c e J., W a l k e r L. Growing electric space charge waves. *Phys. Rev.*, **104**, 306 (1956).
- R o s e n b l u t h M., L o n g m i r e C. Stability of plasmas confined by magnetic fields. *Ann. Phys.* **1**, 120 (1957).
- C h a n d r a s e k h a r S. The partition of energy in hydromagnetic turbulence. *Ann. Phys. (N. Y.)*, **2**, 615 (1957).
- T r e h a n S. On the stability of force-free magnetic fields. *Astrophys J.*, **126**, 429 (1957).
- T a y l e r R. The influence of an axial magnetic field on the stability of a constricted gas discharge. *Proc. Phys., Soc.*, **B70**, 1049 (1957).
- P a r k e r E. Dynamical instability in an anisotropic ionized gas of low density. *Phys. Rev.*, **109**, 1874 (1958).
- S t u r r o c k P. Kinematics of growing waves. *Phys. Rev.*, **112**, 1488 (1958); **117**, 1426 (1960).
- E d m o n d s F. Hydromagnetic stability of a conducting fluid in a circular magnetic field. *Phys. Fluids.*, **1**, 30 (1958).
- K r u s k a l M., O b e r m a n C. Stability of plasma in static equilibrium *Phys. Fluids.*, **1**, 275 (1958).
- J o h n s o n J. et al. Some stable hydromagnetic equilibria. *Phys. Fluids*, **1**, 281 (1958).
- K r u s k a l M. et al. Hydromagnetic instability in a stellarator. *Phys. Fluids*, **1**, 421 (1958).
- B e r n s t e i n I. et al. An energy principle for hydromagnetic stability problems. *Proc. Roy. Soc.*, **A244**, 17 (1958).
- K r u s k a l M., T u c k J. The instability of a pinched fluid with a longitudinal magnetic field. *Proc. Roy. Soc.*, **A245**, 222 (1958).
- C h a n d r a s e k h a r S. et al. The stability of the pinch. *Proc. Roy. Soc.*, **A245**, 435 (1958).
- К о в р и ж н ы х Л. М. Об устойчивости полого газового проводника в магнитном поле. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **37**, 92 (1959).
- К а д о м ц е в Б. Б. О конвективной неустойчивости плазменного шнура. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **37**, 1096 (1959).

- Rosenbluth M., Rostoker N. Theoretical Structure of plasma equations. *Phys. Fluids.*, **2**, 23 (1959).
- Винеман О. Dissipation of currents in ionized media. *Phys. Rev.*, **115**, 503 (1959).
- Киценко А. Б., Степанов К. Н. О неустойчивости плазмы с анизотропным распределением скоростей ионов и электронов. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **38**, 1841 (1960).
- Сагдеев Р. З., Шафранов В. Д. О неустойчивости плазмы с анизотропным распределением скоростей в магнитном поле. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **39**, 181 (1960).
- Тимофеев А. В. Раскачка ионных звуковых колебаний в анизотропной плазме. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **39**, 397 (1960).
- Алексин В. Ф., Яшин В. И. Исследование устойчивости плазмы с помощью обобщенного энергетического принципа. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **39**, 822 (1960).
- Newcomb W. Hydromagnetic stability of a diffuse linear pinch. *Ann. Phys.* **10**, 232 (1960).
- Kellogg P., Liemohn H. Instability of contra-streaming plasmas. *Phys. Fluids*, **3**, 40 (1960).
- Bernstein I. et al. Ion wave instabilities. *Phys. Fluids*, **3**, 136 (1960).
- Penrose O. Electrostatic instabilities of a uniform non-Maxwellian plasma. *Phys. Fluids*, **3**, 258 (1960).
- Jackson E. Drift instabilities in a Maxwellian plasma. *Phys. Fluids*, **3**, 786 (1960).
- Rosenbluth M. Long-wavelength beam instability. *Phys. Fluids*, **3**, 932 (1960).
- Bernstein I., Kulsrud R. Ion wave instabilities. *Phys. Fluids*, **3**, 937 (1960).
- Weibel E. Dynamic stabilization of a plasma column. *Phys. Fluids*, **3**, 946 (1960).
- Furth H. Sufficient conditions for hydromagnetic stability of a diffuse linear pinch. *Phys. Fluids*, **3**, 977 (1960).
- Colgate S., Furth H. Stabilization of pinch discharges. *Phys. Fluids*, **3**, 982 (1960).
- Ахизер А. И. и др. Об условиях устойчивости функции распределения в плазме. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **40**, 963 (1960).
- Newfield J., Doyle P. Electromagnetic interaction of a beam of charged particles with plasma. *Phys. Rev.*, **121**, 654 (1961).
- Rostoker N., Kolb A. Fission of a hot plasma. *Phys. Rev.*, **124**, 965 (1961).
- Gerjuoy E., Rosenbluth M. Pinch with rotating plasma. *Phys. Fluids.*, **4**, 112 (1961).
- Krall N., Rosenbluth M. Stability of a slightly inhomogeneous plasma. *Phys. Fluids*, **4**, 163 (1961).
- Newcomb W., Kaufman A. Hydromagnetic stability of a tubular pinch. *Phys. Fluids*, **4**, 314 (1961).
- Low F. Persistence of stability in Lagrangian systems. *Phys. Fluids*, **4**, 842 (1961).
- Lehnert B. Stability of a plasma boundary in a magnetic field. *Phys. Fluids.*, **4**, 847 (1961).

- L u s t R. et al. Hydromagnetic stability of a toroidal gas discharge. Phys. Fluids, 4, 891 (1961).
- F r i e m a n E., P y t t e A. Electrostatic instabilities in slightly inhomogeneous plasmas. Phys. Fluids, 4, 1026 (1961).
- A l b a r e s D. et al. Rayleigh — Taylor instability in a stabilized linear pinchtube Phys. Fluids, 4, 1031 (1961).
- B e r n s t e i n I., K u l s r u d R. Stability of a current-carrying plasma. Phys. Fluids, 4, 1037 (1961).
- T i d m a n D. Effect of Coulomb scattering on two-stream instabilities in a plasma. Phys. Fluids, 4, 1379 (1961).
- F o w l e r T. Stability of plasmas against electrostatic perturbations. Phys. Fluids, 4, 1393 (1961).
- B u r t P., H a r r i s F. Unstable cyclotron oscillations in a cylindrical plasma shell. Phys. Fluids, 4, 1412 (1961).
- J o h n s o n J., G r e e n e J. Hydromagnetic stability of toroidal equilibria with an externally imposed rotational transform. Phys. Fluids, 4, 1417 (1961).
- J u k e s J. Stability of the sharp pinch and unpinch with finite conductivity. Phys. Fluids, 4, 1527 (1961).
- R o s e n b l u t h M. et al. Finite Larmor radius stabilization of weakly unstable confined plasmas. Proc. Conf. plasma phys. and contr. Nucl. Fusion. Austria, Salzburg, 1962, p. 143 (Suppl. to Nucl. Fusion).
- W a r e A. Harmonics of the Kruskal limit and field diffusion in toroidal pinch discharge. Phys. Rev., 125, 417 (1962).
- N e i l V. Stability of thin electron layers. Phys. Fluids., 5, 14 (1962).
- H o h F. Screw instability of plasma column. Phys. Fluids, 5, 22 (1962).
- T r u b n i k o v B. Dynamical principle of stability for magnetohydrostatic systems. Phys. Fluids, 5, 184 (1962).
- K u l s r u d R. On the necessity of the energy principle of Kruskal and Oberman for stability. Phys. Fluids, 5, 192 (1962).
- F r i e m a n F. et al. Two-stream instability in finite beams. Phys. Fluids, 5, 196 (1962).
- B e r n s t e i n I., K u l s r u d R. Effect of charge exchange on the critical current for ion-wave instabilities. Phys. Fluids, 5, 210 (1962).
- L e h n e r t B. Plasma stability in an inhomogeneous magnetic field. Phys. Fluids, 5, 432 (1962).
- L ü s t R. et al. Stability of a plasma torus against disturbances not dependent on the azimuth. Phys. Fluids, 5, 439 (1962).
- J o h n s o n J. et al. Hydromagnetic stability of toroidal equilibria with an externally imposed rotational transform. Phys. Fluids, 5, 815 (1962).
- G r e e n e J. et al. Equilibrium and stability of helical hydromagnetic systems. Phys. Fluids, 5, 1063 (1962).
- I c h i m a r u S. Wave properties of a plasma with a doubly humped velocity distribution. Phys. Fluids, 5, 1264 (1962).
- K r a l l N., R o s e n b l u t h M. Trapping instabilities in a slightly inhomogeneous plasma. Phys. Fluids, 5, 1435 (1962).
- D r u m m o n d W., R o s e n b l u t h M. Anomalous diffusion arising from microinstabilities in a plasma. Phys. Fluids, 5, 1507 (1962).



- Dreicer H., Mjolsness R. Formation of drift instabilities by collisional relaxation of high energy particles. *Phys. Fluids*, **5**, 1531 (1962).
- Sonnerup B., Laird M. On magnetospheric interchange instability. *J. Geophys. Res.*, **68**, 131 (1963).
- Scarf F. Plasma instability and the microwave radiation of Venus. *J. Geophys. Res.*, **68**, 141 (1963).

## Глава 12

- Edmonds F. Compton scattering by electrons with a Maxwellian distribution of thermal velocities. *Astrophys. J.*, **117**, 298 (1953).
- Berger J. Absorption coefficients for free-free transitions in a hydrogen plasma. *Astrophys. J.*, **124**, 550 (1956).
- Field G. Radiation by plasma oscillations. *Astrophys. J.*, **124**, 555 (1956).
- Hiltner W. Polarization of the crab nebula. *Astrophys. J.*, **125**, 300 (1957).
- Трубников Б. А. Излучение плазмы в магнитном поле. «Докл. АН СССР», **118**, 913 (1958).
- Эйдман В. Я. Излучение электрона, движущегося в магнитоактивной плазме. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **34**, 131 (1958).
- Veard D. Cyclotron radiation from magnetically confined plasmas. *Phys. Fluids*, **2**, 379 (1959).
- Степанов К. Н., Пахомов В. И. О магнитотормозном излучении ограниченной плазмы. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **38**, 1564 (1960).
- Drummond W., Rosenbluth M. Cyclotron radiation from a hot plasma. *Phys. Fluids*, **3**, 45, 491 (1960).
- Harris E., Simon A. Coherent and incoherent radiation from a plasma. *Phys. Fluids*, **3**, 255 (1960).
- Veard D. Relativistic calculation for cyclotron radiation from hot plasmas. *Phys. Fluids*, **3**, 324 (1960).
- Parker E., Tidman D. Radio emission from plasma shocks. *Phys. Fluids*, **3**, 369 (1960).
- Wylde H. Radiation by plasma oscillations in a bounded plasma in a magnetic field. *Phys. Fluids*, **3**, 408 (1960).
- Rosen P. Scattering of electromagnetic waves by longitudinal plasma waves. *Phys. Fluids*, **3**, 416 (1960).
- Oster L. Effects of collisions on the cyclotron radiation, *Phys. Rev.*, **119**, 1444 (1960); **121**, 961 (1961).
- Browne P. On the origin of radio emission from cosmic gas clouds. *Astrophys. J.*, **134**, 963 (1961); **136**, 442 (1962).
- Ford G. Electromagnetic radiation from a source in a plasma. *Ann. Phys.* **16**, 185 (1961).
- Bekefi G. et al. Cyclotron emission from plasmas with non-Maxwellian distributions. *Phys. Rev.*, **122**, 1037 (1961).
- Cohen M. Cerenkov effect in plasma. *Phys. Rev.*, **123**, 711 (1961).
- Bekefi G. et al. Kirchhoff's radiation law for plasmas with non-Maxwellian distributions. *Phys. Fluids*, **4**, 173 (1961).
- Трубников В. Angular distribution of cyclotron radiation from a hot plasma. *Phys. Fluids*, **4**, 195 (1961).
- Hirshfield J. et al. Cyclotron radiation from a hot plasma. *Phys. Fluids*, **4**, 198 (1961).

- Drummond W., Rosenbluth M. Comments on synchrotron radiation. *Phys. Fluids*, **4**, 277 (1961).
- Beard D., Baker J. Comment on the angular dependence of plasma synchrotron emission. *Phys. Fluids*, **4**, 278 (1961).
- Beard D., Baker J. Synchrotron radiation from mirror machine geometries. *Phys. Fluids*, **4**, 611 (1961).
- Tidman D., Weiss G. Radio emission by plasma oscillations in nonuniform plasmas. *Phys. Fluids*, **4**, 703 (1961).
- Hirshfield J., Brown S. Incoherent microwave radiation from plasma in magnetic field. *Phys. Rev.*, **122**, 719 (1961).
- Gajewski R., Hirshfield J. Influence of Coulomb interactions on the cyclotron radiation of electrons moving on a single orbit. *Phys. Fluids*, **4**, 736 (1961).
- Hershberger W. Radiation field and O of a resonant cylindrical plasma column. *Phys. Fluids*, **4**, 740 (1961).
- Tidman D., Weiss G. Radiation by a large-amplitude plasma oscillation. *Phys. Fluids*, **4**, 866, 1186 (1961).
- Jukes J. High-frequency tail of cyclotron radiation from a hot plasma. *Phys. Fluids*, **4**, 1184 (1961).
- Hirshfield J., Brown S. Reply to comments by J. Jukes. *Phys. Fluids*, **4**, 1185 (1961).
- Tortia E. Cyclotron radiation from a hot plasma. *Phys. Fluids*, **4**, 1572 (1961).
- Chang D., Davis L. Synchrotron radiation as the source of Jupiter's polarized decimeter radiation. *Astrophys. J.*, **136**, 567 (1962).
- Tidman D., Boyd J. Radiation by plasma oscillations incident on a density discontinuity. *Phys. Fluids*, **5**, 213 (1962).
- Rosenbluth M., Rostoker N. Scattering of electromagnetic waves by a nonequilibrium plasma. *Phys. Fluids*, **5**, 776 (1962).
- Chang D. Bremsstrahlung from a plasma. *Phys. Fluids*, **5**, 1558 (1962).
- Chang D. Plasma correction to single-particle cyclotron radiation. *Phys. Fluids*, **5**, 1564 (1962).

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому переводу . . . . .	3
От автора . . . . .	5
<b>Глава 1. Основные уравнения и законы сохранения . . .</b>	<b>7</b>
§ 1.1. Введение . . . . .	7
§ 1.2. Некоторые особенности уравнений Максвелла . . .	10
§ 1.3. Сохранение импульса . . . . .	11
§ 1.4. Некоторые примеры использования тензора на- тяжений . . . . .	15
§ 1.5. Общее выражение для дивергенции тензора в ци- линдрических координатах . . . . .	18
§ 1.6. Закон сохранения энергии . . . . .	19
§ 1.7. Закон сохранения массы . . . . .	23
§ 1.8. Уравнение Лиувилля. . . . .	23
§ 1.9. Уравнение Лиувилля с учетом силы Лоренца .	26
§ 1.10. Магнитогидродинамическое приближение . . .	30
<b>Глава 2. Метод орбит . . . . .</b>	<b>35</b>
§ 2.1. Введение . . . . .	35
§ 2.2. Ларморовские окружности . . . . .	36
§ 2.3. Магнитный момент и ток намагничивания . . . . .	37
§ 2.4. Влияние постоянного электрического поля . . .	40
§ 2.5. Переменное электрическое поле и диэлектриче- ская проницаемость плазмы . . . . .	41
§ 2.6. Влияние гравитации . . . . .	45
§ 2.7. Влияние зависимости магнитного поля от времени	45
§ 2.8. Электрический дрейф и движение силовых линий магнитного поля . . . . .	46
§ 2.9. Влияние пространственной неоднородности $\mathbf{B}$ . .	52
§ 2.10. Порядок величины скоростей дрейфа . . . . .	58
§ 2.11. Продольный адиабатический инвариант . . . .	59
<b>Глава 3. Применение метода орбит к статическим задачам</b>	<b>63</b>
§ 3.1. Введение . . . . .	63
§ 3.2. Случай, когда поле $\mathbf{B}$ не зависит от $z$ , а внешние силы отсутствуют . . . . .	64

§ 3.3. Искривленные линии поля $\mathbf{B}$ в отсутствие внешних сил . . . . .	66
§ 3.4. Общая статическая задача в отсутствие внешних сил . . . . .	68
§ 3.5. Движение вдоль силовых линий . . . . .	71
§ 3.6. Система уравнений для общей статической задачи	77
§ 3.7. Теорема вириала . . . . .	84
§ 3.8. Бессиловые конфигурации . . . . .	87
<b>Г л а в а 4. Применение метода орбит к динамическим задачам . . . . .</b>	<b>91</b>
§ 4.1. Введение . . . . .	91
§ 4.2. Плазма в магнитном поле при наличии сил тяготения . . . . .	91
§ 4.3. Общая двухмерная задача для случая, когда силовые линии $\mathbf{B}$ прямые . . . . .	96
§ 4.4. Поляризация плазмы, заключенной между проводящими плоскостями. . . . .	102
§ 4.5. Замечания относительно общей динамической задачи . . . . .	109
<b>Г л а в а 5. Точные статические решения . . . . .</b>	<b>110</b>
§ 5.1. Введение . . . . .	110
§ 5.2. Нормальное к границе движение положительных и отрицательных частиц равной массы . . . . .	111
§ 5.3. Нормальное к границе движение реальных частиц	114
§ 5.4. Решение задачи о граничном слое с помощью уравнения Лиувилля . . . . .	117
§ 5.5. Два упрощающих предположения . . . . .	120
§ 5.6. Рассмотрение случая нормального к границе движения частиц с помощью уравнения Лиувилля . . . . .	120
§ 5.7. Задача с изотропным распределением скоростей в плазме . . . . .	122
§ 5.8. Метод построения общего решения для плоского случая . . . . .	126
§ 5.9. Общее решение для случая осевой симметрии . . . . .	127
§ 5.10. Осесимметричная задача для случая частиц равных масс . . . . .	128
<b>Г л а в а 6. Волны малой амплитуды в плазме . . . . .</b>	<b>131</b>
§ 6.1. Введение . . . . .	131
§ 6.2. Случай отсутствия магнитного поля . . . . .	131
§ 6.3. Доказательство законности пренебрежения действием магнитного поля . . . . .	140

§ 6.4. Резонанс, или затухание, Ландау . . . . .	140
§ 6.5. Магнитогидродинамические, или альфвеновские, волны . . . . .	144
§ 6.6. Волны произвольной частоты. Вектор $\mathbf{k}$ параллелен $\mathbf{V}_{\text{вн}}$ . . . . .	150
§ 6.7. Волны произвольной частоты. Вектор $\mathbf{k}$ перпендикулярен $\mathbf{V}_{\text{вн}}$ . . . . .	155
§ 6.8. Задача с начальными условиями . . . . .	160
§ 6.9. Косые волны в случае нулевой температуры . . . . .	162
<b>Г л а в а 7. Магнитогидродинамические ударные волны . . . . .</b>	<b>164</b>
§ 7.1. Введение . . . . .	164
§ 7.2. Распространение ударной волны в направлении, перпендикулярном магнитному полю . . . . .	166
§ 7.3. Распространение ударной волны в направлении, параллельном магнитному полю . . . . .	174
§ 7.4. Структура магнитогидродинамической ударной волны. Случай слабой ударной волны . . . . .	178
§ 7.5. Модель поперечной ударной волны . . . . .	187
<b>Г л а в а 8. Столкновения частиц . . . . .</b>	<b>193</b>
§ 8.1. Введение . . . . .	193
§ 8.2. Флуктуации в нейтральной плазме . . . . .	193
§ 8.3. Экранирование электрических зарядов в плазме . . . . .	200
§ 8.4. Дебаевский радиус в неравновесной плазме . . . . .	202
§ 8.5. Кулоновское рассеяние . . . . .	203
§ 8.6. Влияние магнитного поля . . . . .	208
§ 8.7. Корреляция частиц . . . . .	210
<b>Г л а в а 9. Диффузия в пространстве скоростей . . . . .</b>	<b>212</b>
§ 9.1. Введение . . . . .	212
§ 9.2. Уравнение Больцмана . . . . .	212
§ 9.3. Тепловое равновесие . . . . .	216
§ 9.4. Обобщение $H$ -теоремы . . . . .	224
§ 9.5. Упрощение интеграла столкновений . . . . .	225
§ 9.6. Рассеяние направленного пучка . . . . .	229
§ 9.7. Средняя скорость изменения энергии частиц . . . . .	231
§ 9.8. Уравнение Фоккера — Планка . . . . .	239
§ 9.9. Электропроводность плазмы . . . . .	246
<b>Г л а в а 10. Диффузия в обычном пространстве поперек направления магнитного поля . . . . .</b>	<b>251</b>
§ 10.1. Введение . . . . .	251
§ 10.2. Конфигурации, соответствующие тепловому равновесию . . . . .	251
§ 10.3. Отклонение от теплового равновесия . . . . .	255

§ 10.4. Возмущения, вносимые столкновениями . . . . .	259
§ 10.5. Диффузия частиц . . . . .	262
§ 10.6. Некоторые решения уравнений диффузии в изо- термическом случае . . . . .	266
§ 10.7. Баланс давлений и сопротивление плазмы . . . . .	271
§ 10.8. Теплопроводность . . . . .	273
§ 10.9. Квазиравновесный пинч с конечной проводи- мостью . . . . .	276
<b>Глава 11. Устойчивость . . . . .</b>	<b>281</b>
§ 11.1. Введение . . . . .	281
§ 11.2. Полностью диамагнитная плазма . . . . .	282
§ 11.3. Неустойчивость плазмы низкого давления . . . . .	289
§ 11.4. Энергетический метод исследования устойчивости	295
§ 11.5. Устойчивость пинча . . . . .	303
§ 11.6. Уточнение теории устойчивости . . . . .	304
§ 11.7. Пучковая неустойчивость . . . . .	306
<b>Глава 12. Плазма и излучение . . . . .</b>	<b>309</b>
§ 12.1. Введение . . . . .	309
§ 12.2. Излучение в плазме при тепловом равновесии . . . . .	309
§ 12.3. Неравновесный случай . . . . .	313
§ 12.4. Тормозное излучение . . . . .	314
§ 12.5. Циклотронное излучение . . . . .	319
<b>Литература . . . . .</b>	<b>323</b>



**К. Лонгмайр**  
**ФИЗИКА ПЛАЗМЫ**  
**элементарный курс**

Тем. план 1966 г. № 10

Редактор *В. Н. Безрукова*  
Переплет худож. *А. С. Александрова*  
Технический редактор *Е. И. Мазель*  
Корректор *З. А. Авдюшева*

Сдано в набор 11/IV 1966 г.  
Подписано в печать 31/VIII 1966 г.  
Бумага, 84×108/32 № 2  
Физ. печ. л. 10,75  
Уч.-изд. л. 16,56. Привед. печ. л. 17,95  
Заказ изд. 1359. Тираж 13.500 экз.  
Цена 1 руб. 34 коп. Зак. тип 303

Атомиздат, Москва, К-31,  
ул. Жданова, 5/7

Московская типография № 4  
Главполиграфпрома Комитета  
по печати при Совете  
Министров СССР  
Б. Переяславская, 46

## В 1967 г. в АТОМИЗДАТЕ выходят следующие книги:

**ХИЛД М., УОРТОН С. Микроволновая диагностика плазмы.** Пер. с англ. Атомиздат, 30 п. л., 5000 экз., 2 р. 30 к., в переплете, IV кв., индекс 2-3-7.

В настоящее время ни одна лаборатория, связанная с исследованиями плазмы, не обходится без использования СВЧ для диагностики плазмы, т. е. определения ее температуры, концентрации и других параметров.

Монография посвящена изучению радиоволн СВЧ сантиметрового и миллиметрового диапазонов — важнейшего орудия экспериментального исследования плазмы. В десяти главах и двух приложениях книги изложены основы теории распространения высокочастотных волн в плазме. Подробно рассмотрены теория волн в холодной плазме, геометрическая оптика, используемая при распространении волн в ограниченной и неоднородной плазме, и ряд других вопросов. Превосходно описаны методы активной диагностики и способы измерения теплового и нетеплового излучения плазмы.

В конце книги приведены описания приборов и аппаратуры для микроволновых измерений. Монография иллюстрирована графиками, схемами и фотографиями экспериментальных установок.

Книга вызовет большой интерес у инженерно-технических и научных работников-физиков. Она будет полезна студентам и преподавателям вузов, интересующимся вопросами диагностики плазмы.



**Вопросы теории плазмы.** Вып. 5. Под общей редакцией акад. М. А. Леонтовича. Атомиздат, 28 п. л., 6000 экз., 1 р. 50 к., в переплете, II кв., индекс 2-3-7.

Серия выпусков «Вопросы теории плазмы» подготовлена к печати ведущими сотрудниками Института атомной энергии им. И. В. Курчатова.

Пятый выпуск серии «Вопросы теории плазмы» содержит несколько работ, посвященных в основном изложению теории излучения плазмы.

В одной из работ рассматриваются тормозное, рекомбинационное и линейчатое излучение, уширение спектральных линий, перенос излучения в плазме, ионизационное равновесие примесей и смежные вопросы. Другая посвящена изложению теории циклотронного излучения плазмы в магнитном поле и его роли в энергетическом балансе высокотемпературной плазмы. В третьей дается обзор современного состояния вопроса о точности сохранения адиабатических инвариантов при движении заряженных частиц в электромагнитных полях и т. д.

Книга рассчитана на научных работников, инженеров-физиков, аспирантов и студентов, специализирующихся по физике плазмы.